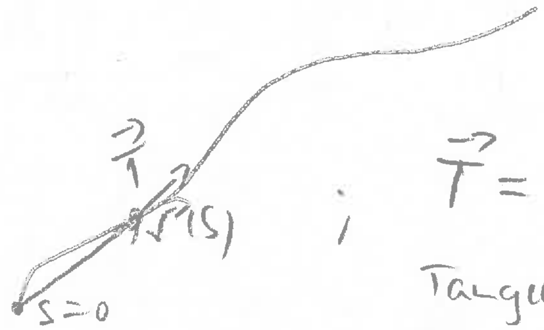
[Übu]ngen Theo 1 04. + 08. 11. 2013

Erinnerung: begleitendes Dreibein

Kurve parametrisiert mit Bogenlänge



$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ (Länge 1!)

Tangentenvektor

$\vec{N} = \frac{1}{\varkappa} \frac{d\vec{T}}{ds}$; $\varkappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$ Krümmung ; $\varrho = \frac{1}{\varkappa}$ Krümmungsradius

Hauptnormalenvektor

$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$: Binormalenvektor

$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{N}$; $\tau = \left|\frac{d\vec{B}}{ds}\right|$ Torsion ; $\sigma = \frac{1}{\tau}$ Torsionsradius

$\Rightarrow$ s. Greiner Bd. I oder Maphy-Skript S. 37 ff.

Anwendung auf Bewegung eines Massenpunktes

$\vec{r}(t)$ Ortsvektor als Funktion der Zeit

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) \quad ; \quad ds = dt\,|\dot{\vec{r}}| = v\,dt$$

Tangentenvektor:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{v}\frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = v(t)\,\vec{T}(t)}$$

Beschleunigung:

$$\vec b = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d^2\vec r}{dt^2} = \ddot{\vec r} = \dot{\vec v}$$

$$\vec v = v\vec T \Rightarrow \dot{\vec v} = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec T) = \frac{dv}{dt}\vec T + v\frac{d\vec T}{dt}$$

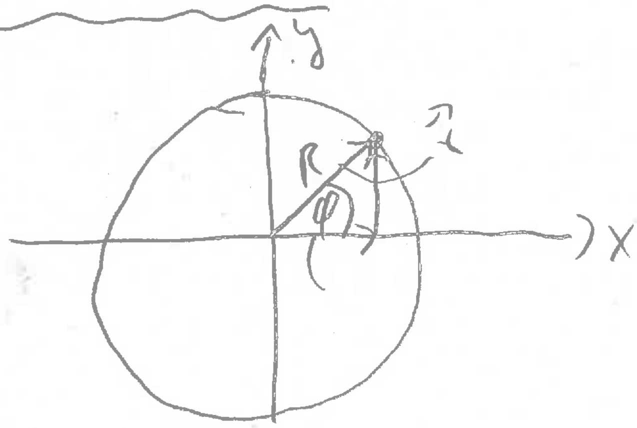
$$\frac{d\vec T}{dt} = \frac{d\vec T}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec T}{ds} = v\kappa\vec N = \frac{v}{\rho}\vec N$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec b = \frac{dv}{dt}\vec T + \frac{v^2}{\rho}\vec N}$$

Tangentialbeschleunigung

Zentripetalbeschleunigung

Beispiel: Kreisbewegung



Parametrisierung mit Winkel φ:

$$\vec r = R\cos\varphi\,\vec e_1 + R\sin\varphi\,\vec e_2$$

Tangentenvektor

$$\frac{d\vec r}{d\varphi} = -R\sin\varphi\,\vec e_1 + R\cos\varphi\,\vec e_2\ ; \quad \left|\frac{d\vec r}{d\varphi}\right| = R$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| = R$$

$$\vec{T} = \frac{1}{R}\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \frac{d\vec{r}}{ds} = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2$$

Normalenvektor

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R}\frac{d\vec{T}}{d\varphi} = (-\cos\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\,\vec{e}_2)\frac{1}{R}$$

$$\varkappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{1}{R} \Rightarrow R \text{ ist Krümmungsradius}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\varkappa}\frac{d\vec{T}}{ds} = -\cos\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\,\vec{e}_2 \,,$$

Binormalenvektor

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = (-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2) \times (-\cos\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\,\vec{e}_2)$$

$$= \sin^2\varphi\,\vec{e}_3 + \cos^2\varphi\,\vec{e}_3 = \vec{e}_3 = \text{const}$$

$\Rightarrow \frac{d\vec{B}}{ds} = 0 \Rightarrow$ Kurve bleibt in Ebene, Torsion $= 0$!

Geschwindigkeit

Massenpunkt beschrieben durch Funktion $\varphi = \varphi(t)$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \vec{T}R\dot{\varphi} = \omega R\vec{T}$$

$\dot{\varphi} = \omega$ Winkelgeschwindigkeit

Beschleunigung

$$\vec{b} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds}\frac{ds}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = R^2\left[\dot{\omega}\vec{T} + \omega\frac{d\vec{T}}{ds}\right]$$

$$= R^2\dot{\omega}T + R^2\omega\frac{1}{R}$$

$$\vec{b} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\left(\dot{\omega}\vec{T} + \omega\dot{\vec{T}}\right)$$

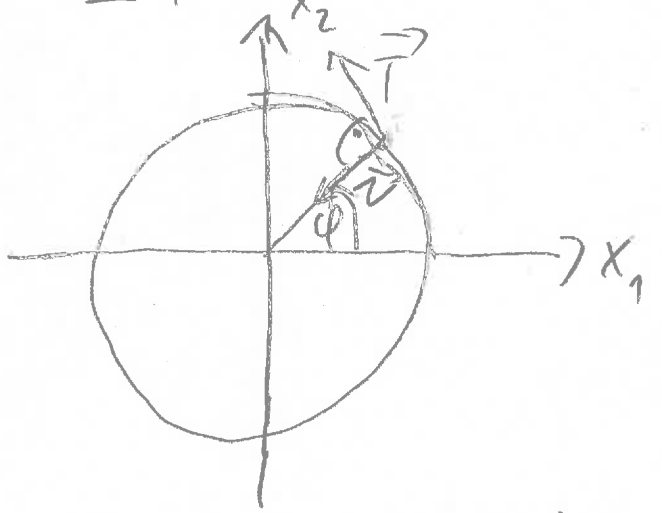
$$= R\dot{\omega}\vec{T} + R\omega\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$= R\dot{\omega}\vec{T} + \omega\vec{N}R\omega$$

$$= R\dot{\omega}\vec{T} + R\omega^2\vec{N}, \quad \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

↑ Winkelbeschl.

$$= R\dot{\omega}$$



$R\dot{\omega}$ ist Tangentialbeschleunigung

$R\omega^2$ ist Zentripetalbeschleunigung

weist immer senkrecht zum Mittelpunkt des Kreises
zur Bahn

Integration von Vektoren

Erinnerung: (a) Unbestimmtes Integral einer Funktion

$$F(x) = \int dx\, f(x)$$

ist definiert durch

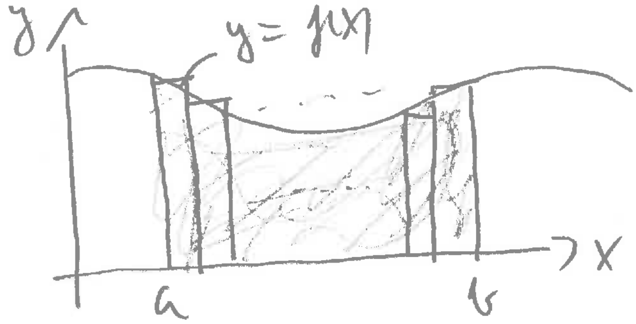
$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$$

bestimmt nur bis auf Konstante!

Beispiel: $f(x) = 2x \Rightarrow \int dx\, 2x = x^2 + C$

(b) bestimmtes Integral

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) \,\hat{=}\, \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta x_k$$



$$\Rightarrow \int_a^b dx\, f(x) = \text{Fläche unter Kurve } y = f(x)$$

Integration von Vektor-Funktionen

$$\int d\tau\, \vec{A}(\tau) = \int d\tau \left[A_1(\tau)\, \vec{e}_1 + A_2(\tau)\, \vec{e}_2 + A_3(\tau)\, \vec{e}_3 \right]$$

$$\underset{=}{\text{def.}} \left(\int d\tau\, A_1(\tau) \right) \vec{e}_1 + \left(\int d\tau\, A_2(\tau) \right) \vec{e}_2$$

$$+ \left(\int d\tau\, A_3(\tau) \right) \vec{e}_3$$

denn $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sind konstante kartesische Basisvektoren

Beispiel: Konstante Beschleunigung

$\vec{b} = \vec{a} = \overrightarrow{\text{const.}} \Rightarrow$ Geschwindigkeit?

$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \Rightarrow \vec{v}(t) = \int dt\, \vec{b}(t) = \int dt\, \vec{a}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{a}\,t + \underbrace{\vec{v}_0}_{\text{const!}}}$$

Trajektorie

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{r} = \int dt\, \vec{v} = \int dt\, [\vec{a}\,t + \vec{v}_0]$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}}{2}t^2 + \vec{v}_0\,t + \underbrace{\vec{r}_0}_{\text{const.}}}$$

Integrationskonstanten bestimmt durch Anfangsbed.

hier $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$; $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$

Linienintegrale (≡ Wegintegrale)

Motivation: Teilchen in einem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

$\vec{F}$: Vektorfeld: gibt Kraft (Vektorgröße!) an jedem Ort im Raum an

Beispiel: Gravitationsfeld einer Masse M (radialsymm.)

Newton:

$$\text{Kraft} \propto \frac{1}{r^2} = \frac{1}{|\vec{r}|^2} \Rightarrow \boxed{|\vec{F}| = \frac{GmM}{r^2}}$$

$\propto M$ und $\propto m$

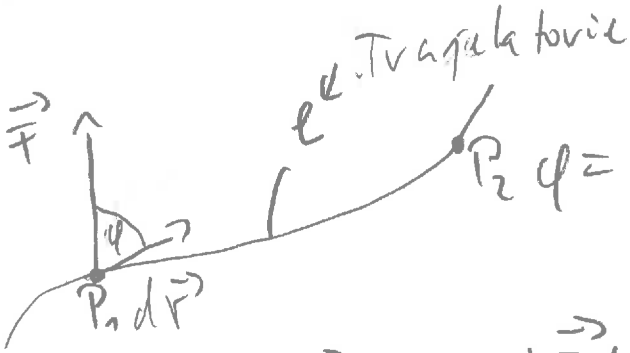
Richtung: immer auf Zentrum von M gerichtet

Einheitsvektor: $-\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{GmM}{r^2}\left(-\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}}$$

Arbeit: Wichtig für Begriff der Energie später



$\varphi = \sphericalangle(\vec{F}, d\vec{r})$

$$dA = d\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = ds\,|\vec{F}(\vec{r})|\cos\left[\sphericalangle(\vec{F}, d\vec{r})\right]$$

↑ Skalarprodukt!

Summiert man über alle Teilstücke und macht diese beliebig klein

$$\Rightarrow A = \int_{\ell} d\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r})$$

Berechnung des Wegintegrals aus Parametrisierung

Es sei $\ell: \vec{r} = \vec{r}(t), t \in [t_1, t_2]$ die Parameterdarstellung des Weges. Dann ist das Wegintegral wegen

$$d\vec{r} = dt \, \frac{d\vec{r}}{dt}$$

durch

$$A = \int_\ell d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d\vec{r}}{dt} \, \vec{F}[\vec{r}(t)]$$

gegeben.

Felder und Differentialoperatoren

(a) Skalare Felder

$F(\vec{r})$ ordnet jedem Ort, definiert durch Ortsvektor $\vec{r}$, eine (reelle) Zahl zu $\Rightarrow$ Skalarfeld

Beispiele: – Temperatur $T = T(\vec{r})$

– Dichte eines Gases, Flüssigkeit oder Festkörpers

$$\rho = \rho(\vec{r})$$

– elektrisches Potential $\varphi(\vec{r})$

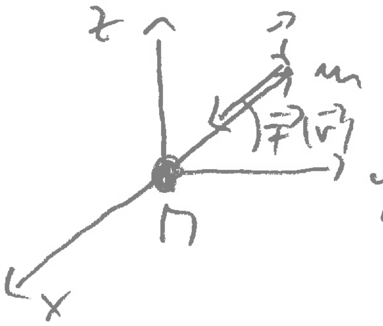
⋮

(b) Vektorfelder

$\vec{a}(\vec{r})$ ordnet jedem Punkt im Raum eine Vektorgröße zu

Beispiele: – Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r})$

z.B. Gravitation: $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$



- Strömungsfeld einer Flüssigkeit

  $\vec v = \vec v(\vec r)$

- Stromdichte: $\vec j(\vec r) = \rho(\vec r)\, \vec v(\vec r)$

  Masse pro Zeit und Fläche ($\perp \vec j$)

<u>Ableitungen</u>

Skalares Feld $\phi(\vec r)$; $\vec r(t)$

Suche $\frac{d}{dt}\phi[\vec r(t)]$ => Änderung von Feld entlang der Bahn $\vec r(t)$?

$$\frac{d}{dt}\phi[\vec r(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi[\vec r(t+\Delta t)] - \phi[\vec r(t)]}{\Delta t}$$

Betrachte $\vec r$ bzgl. kartesischer Basis

$$\vec r = x_1 \vec e_1 + x_2 \vec e_2 + x_3 \vec e_3$$

$$\phi[\vec r(t)] \equiv \phi[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$$

$$\phi[\overbrace{x_1(t+\Delta t)}^{x_1+\Delta x_1}, \overbrace{x_2(t+\Delta t)}^{x_2+\Delta x_2}, x_3(t+\Delta t)] =$$

$$\Rightarrow \phi[x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \phi(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \phi(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \phi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3)$$

$$+ \phi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \phi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3)$$

$$+ \phi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \phi(x_1, x_2, x_3)$$

$$\cong \Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \phi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$$

$$+ \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \phi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3)$$

$$+ \Delta x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \phi(x_1, x_2, x_3) + \dots$$

Partielle Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \phi(x_1, x_2, x_3)$$

ist Ableitung von ϕ nach x_1, wobei x_2 und x_3 als Konstanten betrachtet werden. Analog

$\frac{\partial}{\partial x_2} \phi(x_1, x_2, x_3)$: Abl. nach x_2 mit x_1, x_3 konstant

$\frac{\partial}{\partial x_3} \phi(x_1, x_2, x_3)$: —"— x_3 —"— x_1, x_2 —"—

$$\Rightarrow \phi(\vec{r} + \Delta \vec{r}) - \phi(\vec{r}) = \Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \phi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$$

$$+ \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \phi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3)$$

$$+ \Delta x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \phi(x_1, x_2, x_3)$$

Falls $\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x_1, x_2, x_3)$ stetig in $\vec{r} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \phi[\vec{r}(t)] = \frac{dx_1}{dt} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi[\vec{r}(t)] + \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi[\vec{r}(t)]$$

$$+ \frac{dx_3}{dt} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi[\vec{r}(t)]$$

Definiert man Vektorfeld (11)

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\phi(\vec{r}) + \vec{e}_2 \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x_3}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\phi[\vec{r}(t)] = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ Kettenregel für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

$\vec{\nabla}\phi$ heißt Gradientenfeld von ϕ und ist ein Vektorfeld

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \text{grad}\,\phi$$

Äquipotentialflächen

Gleichung der Form $\phi(\vec{r}) = C = \text{const.}$ definiert Fläche im Raum. Sei nun $\vec{r}(t)$ beliebige Kurve auf dieser Fläche. Dann ist

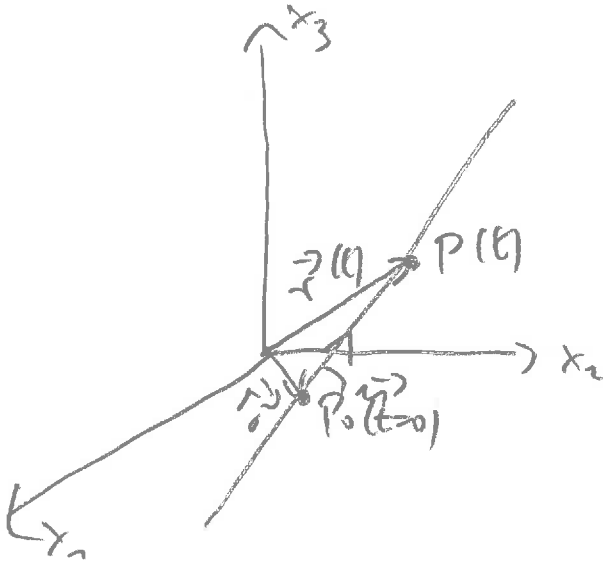
$$\frac{d}{dt}\phi[\vec{r}(t)] = \frac{d}{dt}C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{\nabla}\phi[\vec{r}(t)] = 0$$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi[\vec{r}(t)] \perp$ Tangentenvektor $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big/\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi$ ergibt Vektor $\perp$ zur Fläche

Betrachte Gerade $\vec{r}(t) = \vec{n}\,t + \vec{r}_0$



$|\vec{n}| = 1$

Dann ist

$$\frac{d}{dt}\Phi[\vec{r}(t)]\Big|_{t=0} = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r}_0)$$

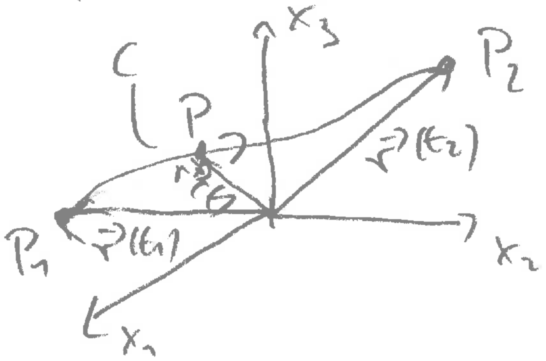
Da $\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi = |\vec{n}|\cdot|\vec{\nabla}\phi|\,\underbrace{\cos\left(\sphericalangle(\vec{n},\vec{\nabla}\phi)\right)}_{\in[-1,1]}$

Wird $\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi$ maximal für $\vec{n} \parallel \vec{\nabla}\phi \Leftrightarrow \sphericalangle(\vec{n},\vec{\nabla}\phi)=0$

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\phi$ liefert Richtung der stärksten Änderung von ϕ.

Wegintegral eines Gradientenfeldes

Es sei $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ ein Gradientenfeld und $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ Kurve C



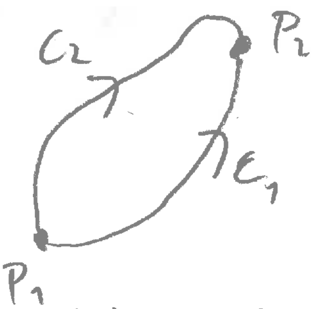
$$\Rightarrow \int_C d\vec{r} \cdot \vec{A} = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{A}[\vec{r}(t)]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \phi [\vec{r}(t)]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt} \phi [\vec{r}(t)]$$

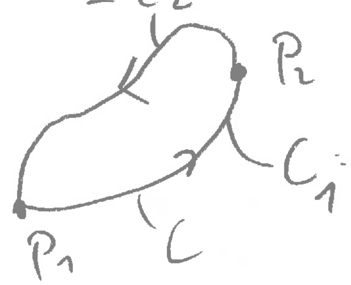
$$= \phi [\vec{r}(t_2)] - \phi [\vec{r}(t_1)]$$

Solange man nur Wege betrachtet, die durch Gebiet verlaufen, wo $\vec{A}$ stetig ist, hängt wegen $\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$ das Wegintegral nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab.



$$\int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{A} - \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{A} = 0$$

Definiere geschlossenen Weg C "$= C_1 - C_2$" also



$$\Rightarrow \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{A} = 0$$

für alle geschlossenen Wege!

Umkehrung: Falls $\vec{A}$ gegeben

– ist $\vec{A}$ Gradientenfeld?

– falls ja, was ist ϕ, so daß

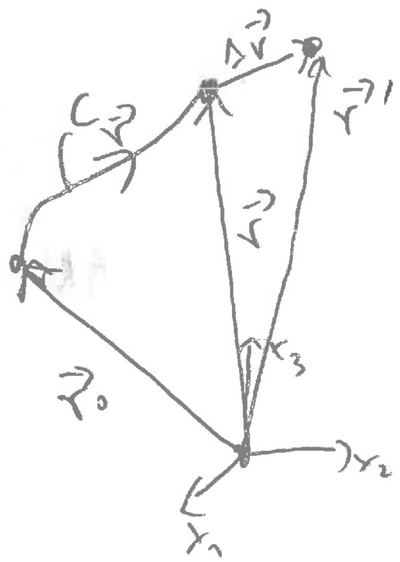
$$\vec{A} = \vec{\nabla}\phi \; ?$$

Betrachtung oben $\Rightarrow$ $\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{A} = 0$ für alle geschl.

Wege C.

Finde ϕ

Betrachte Wege von festem Punkt $\vec{r}_0$ zu Punkt $\vec{r}$



C ist beliebig, weil voraussetzungsgemäß

$$\phi(\vec{r}) = \int_{C_{\vec{r}}} d\vec{r}\cdot\vec{A}$$

unabhängig vom Weg ist.

Zeige: $\vec{A}(\vec{r}) \overset{?}{=} \vec{\nabla}\phi(\vec{r})$

Betrachte speziellen Weg für

$$\phi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) = \int_{C_{\vec{r}}} d\vec{r}\cdot\vec{A} + \int_{\tilde{C}_{\Delta\vec{r}}} d\vec{r}\cdot\vec{A}$$

mit $\tilde{C}_{\Delta\vec{r}} : \vec{r}(t) = \vec{r} + t\Delta\vec{r} \quad t\in[0,1]$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = \int_{\tilde{C}_{\Delta r}} d\vec{r}\cdot\vec{A}$$

$$= \int_0^1 dt\, \Delta\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r}+\Delta\vec{r}t)$$

$$= \Delta\vec{r}\ \vec{A}(\vec{r}+\tau\Delta\vec{r})$$

mit $\tau\in[0,1]$ (Mittelwertsatz d. Integralrechnung: Annahme $\vec{A}$ stetig in Umgebung von $\vec{r}$)

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \phi(\vec{r}) \xrightarrow[\Delta\vec{r}\to 0]{} \Delta\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r})$$

D.h.

$$\phi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \phi(\vec{r}) \xrightarrow[\Delta r\to 0]{} \Delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \Delta\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r})$$

Da man das für beliebig gerichtete $\Delta\vec{r} = \Delta s\,\vec{n}$ so schreiben kann, ist.

$$\vec{e}_1\cdot\vec{A}(\vec{r}) = A_1(\vec{r}) = \vec{e}_1\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_1}\phi(\vec{r})$$

$$\vec{e}_2\cdot\vec{A}(\vec{r}) = A_2(\vec{r}) = \vec{e}_2\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_2}\phi(\vec{r})$$

$$\vec{e}_3\cdot\vec{A}(\vec{r}) = A_3(\vec{r}) = \vec{e}_3\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_3}\phi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{r})}$$

Beispiele

(a) $\vec{A} = \vec{A}_0 = \text{const.}$

Wegintegral: Wähle geraden Weg von $\vec{r}_0$ (fest) nach $\vec{r}$

$$C_{\vec{r}}: \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t(\vec{r} - \vec{r}_0) \; ; \; t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \int_{C_{\vec{r}}} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \int_0^1 dt \, (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_0$$

$$= t(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_0 \Big|_{t=0}^{t=1} \Rightarrow \phi(\vec{r}) = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_0$$

Probe:

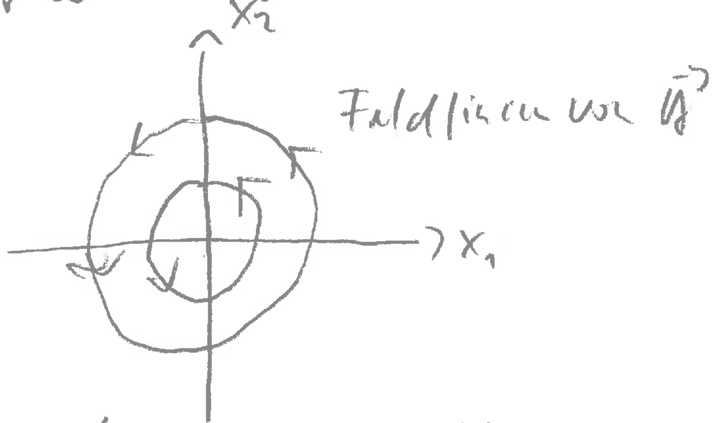
$$\phi(\vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{A}_0 - \underbrace{\vec{r}_0 \cdot \vec{A}_0}_{\text{const!}} = x_1 A_{01} + x_2 A_{02} + x_3 A_{03} - \vec{r}_0 \cdot \vec{A}_0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = A_{01}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = A_{02}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = A_{03}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \phi = \vec{A}_0 = \vec{A} \quad ☺$$

(b) $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$ mit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3 = \text{const.}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$\Rightarrow$ Wegintegral entlang Kreis kann nicht verschwinden

$\Rightarrow$ kann <u>kein</u> Gradientenfeld sein

Berechne Wegintegral entlang Kreis mit Radius R (17)

$$C = K_R : \vec{r}(t) = R\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = R\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}[\vec{r}(t)] = \begin{pmatrix} -\omega R \sin t \\ \omega R \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\oint_{K_R} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \int_0^{2\pi} dt \; R\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \omega R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \omega R^2 \int_0^{2\pi} dt \; \underbrace{[\sin^2 t + \cos^2 t]}_{1}$$

$$= 2\pi \omega R^2 \neq 0$$

Kein Gradientenfeld!

(c) Gravitationskraftfeld einer Punktmasse

$$\vec{F} = K \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{mit } K = -GMm$$

Alternative Berechnungsmethode für ϕ: Angenommen ϕ existiert, so daß $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$. Dann muß

$$F_1 = K \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

Sein.

$\Rightarrow$ Integriere

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = \int dx_1 \; k \frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} + A(x_2,x_3)$$

hängt nicht von x_1 ab!

(unbest. Integral bezgl. x_1!)

Substitution

$$u = x_1^2+x_2^2+x_3^2 \Rightarrow du = \frac{du}{dx_1} dx_1 = 2x_1\, dx_1$$

$$\Rightarrow \phi(x_1,x_2,x_3) = k \int \underbrace{du \frac{1}{2}}_{dx_1 x_1} \frac{1}{u^{3/2}} = -k\, u^{-1/2} + A(x_2,x_3)$$

$$= -\frac{k}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}} + A(x_2,x_3)$$

Weiter muß gelten

$$F_2 = k \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^{\,3}} = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} = \frac{k\, x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^{\,3}} + \frac{\partial A(x_2,x_3)}{\partial x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A(x_2,x_3)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow A = B(x_3)$$

und schließlich

$$F_3 = \kappa \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^{\,3}} = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} = \kappa \frac{x_3}{\sqrt{}^{\,3}} + \frac{\partial}{\partial x_3} B(x_3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow B = C = \text{const.}$$

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\kappa}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} = -\frac{\kappa}{|\vec{r}|} = -\frac{\kappa}{r}$$

$\Rightarrow \vec{F}$ ist Gradientenfeld mit $\phi(\vec{r}) = -\frac{\kappa}{r}$

<u>NB:</u> In Mechanik verwendet man normalerweise ein Potential $U(\vec{r})$, so daß

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$$

Später: Falls solch ein U existiert, dann ist

$$E = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + U(\vec{r})$$

entlang der Bahnkurve eines Massenpunkts im Kraftfeld konstant.

Für Gravitationsfeld von oben

$$U = -\phi = \frac{\kappa}{r} = -\frac{G m M}{r}$$

(Newtonsches Gravitationspotential)