Vorlesung Theoretische Physik I 27.01.2014 + 31.01.2014

Matrizenrechnung

- Betrachte lineare Abbildungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \longmapsto \vec{y} \in \mathbb{R}^m$
- Schreibe Vektoren als Spaltenanordnungen von Zahlen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

- Lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matrix-Vektorprodukt: Immer "Skalarprodukt" aus Zeile der Matrix x Spaltenvektor ⇒ Spaltenvektor. $\vec{y} = \hat{A} \cdot \vec{x}$

Mit Summenzeichen

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad ; \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Speziell: Quadratische Matrix $n = m$.

Rechenregeln

(1) Addition

$$\vec{y} = \hat{A} \cdot \vec{x} \; ; \; \vec{z} = \hat{B} \cdot \vec{x}$$

$$\Rightarrow \vec{y} + \vec{z} = \hat{A} \cdot \vec{x} + \hat{B} \cdot \vec{x}$$

$$y_i + z_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} x_k + \sum_{k=1}^{n} B_{ik} x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (A_{ik} x_k + B_{ik} x_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(A_{ik} + B_{ik})}_{C_{ik}} x_k$$

$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$: Addiere entsprechende Einträge

(2) Subtraktion analog: $\hat{C} = \hat{A} - \hat{B} \Leftrightarrow C_{ik} = A_{ik} - B_{ik}$

(3) Gleichheit $\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow A_{ik} = B_{ik}$

(4) Multiplikation mit Skalar

$$\hat{B} = \lambda \hat{A} \Leftrightarrow B_{ik} = \lambda A_{ik}$$

(5) Matrixprodukt (Hintereinanderausführung linearer Abb.)

$$\vec{y} = \hat{A} \vec{x} \; ; \; \vec{z} = \hat{B} \vec{y} = \hat{B} (\hat{A} \vec{x})$$

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} y_k = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} \sum_{l=1}^{n} A_{kl} x_l = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{l=1}^{n} B_{ik} A_{kl}}_{C_{il}} x_l$$

$$\Rightarrow \vec{z} = \hat{C} \vec{x} \text{ mit } \hat{C} := \hat{B} \cdot \hat{A}$$

definiert Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} A_{11} + B_{12} A_{21} + \cdots & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

Immer "Zeile x Spalte".

Umgekehrte Reihenfolge:

$$\hat{C} = \hat{A} \cdot \hat{B} \Rightarrow C_{il} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kl} \overset{!!!}{\neq} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{kl}$$

$$\Rightarrow \hat{A} \cdot \hat{B} \neq \hat{B} \cdot \hat{A}$$

i. A. ist Matrizenprodukt <u>nicht</u> kommutativ

aber es gilt

$$(\hat{A} \cdot \hat{B}) \cdot \hat{C} = \hat{A} \cdot (\hat{B} \cdot \hat{C}) \quad \text{(Assoziativgesetz)}$$

$$\hat{C} \cdot (\hat{A} + \hat{B}) = \hat{C} \hat{A} + \hat{C} \hat{B} \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

(6) Einheitsmatrix

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} ; \quad E_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

(7) Transponierte Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{Def } \hat{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Schreibe Spalten von $\hat{A}$ als Zeilen von $\hat{A}^T$

"Spiegelung an Hauptdiagonale"

$$(\hat{A}^T)_{ik} = A_{ki}$$

$$(\hat{A}^T)^T = \hat{A} \;; \quad (\hat{A} \cdot \hat{B})^T = \hat{B}^T \cdot \hat{A}^T \quad \text{(Reihenfolge beachten!)}$$

(8) Inverse Matrix $\quad \hat{A}^{-1} \cdot \hat{A} = \hat{E}$ (existiert nicht immer)

$\exists$ genau dann, wenn $\det \hat{A} \neq 0$

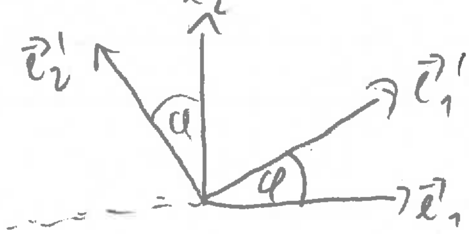
Es gilt auch immer $\hat{A} \cdot \hat{A}^{-1} = \hat{E}$ (ohne Beweis)

Orthogonale Transformationen

Ebene

Betrachte kartesisches Koordinatensystem $\vec{e}_j$ $(j \in \{1,2\})$

und dazu gedrehtes



Es gilt $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}\,'_i \cdot \vec{e}\,'_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Weil Basisvektoren aufeinander $\perp$ sind und Länge 1 ⑤

haben.

Betrachte Vektor $\vec{r}$ in der Ebene. Wie ändern sich Komponenten

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{2} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{2} x_i' \vec{e}_i'$$

$$\vec{e}_j \cdot \vec{r} = \sum_{i=1}^{2} x_i \, \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{2} \delta_{ji} x_i = x_j$$

Genauso

$$\vec{e}_l' \cdot \vec{r} = x_l'$$

$$\Rightarrow x_l' = \sum_{i=1}^{2} x_i \, \vec{e}_l' \cdot \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{2} R_{li} x_i$$

Rotationsmatrix: $\hat{R}$ mit $R_{li} = \vec{e}_l' \cdot \vec{e}_i$

$$\Rightarrow \vec{e}_1' \cdot \vec{e}_1 = \cos\varphi, \quad \vec{e}_1' \cdot \vec{e}_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$

$$\vec{e}_2' \cdot \vec{e}_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi$$

$$\vec{e}_2' \cdot \vec{e}_2 = \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \hat{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\vec{e}_i' = \sum_{k=1}^{2} \vec{e}_k \left(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i'\right) = \sum_{k=1}^{2} R_{ik} \vec{e}_k$$

$$\Rightarrow \delta_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \left(\vec{e}_k R_{ik}\right) \cdot \left(\vec{e}_l R_{jl}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} R_{ik} R_{jl} \underbrace{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^{2} R_{ik} R_{jk}$$

$$\Rightarrow \delta_{ij} = \sum_k R_{ik} (R^T)_{kj} \Leftrightarrow \hat{R}\,\hat{R}^T = \hat{E}$$

oder $\hat{R}^{-1} = \hat{R}^T$ (orthogonale Matrix)

$\Leftrightarrow$ Zeilenvektoren bilden kartesische Basis

Genauso folgt

$$\vec{e}_i = \sum_k \vec{e}\,'_k (\vec{e}\,'_k \cdot \vec{e}_i) = \sum_k R_{ki} \vec{e}\,'_k$$

$$\Rightarrow \delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_k \sum_l (R_{ki} \vec{e}\,'_k) \cdot (R_{lj} \vec{e}\,'_l)$$

$$= \sum_k \sum_l \delta_{kl} R_{ki} R_{lj}$$

$$= \sum_k R_{ki} R_{kj} = \sum_k (R^T)_{ik} R_{kj}$$

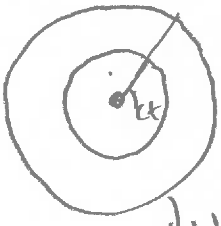
$$\Rightarrow \hat{R}^T \cdot \hat{R} = \hat{E} \Leftrightarrow \hat{R}^{-1} = \hat{R}^T$$

$\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren bilden kartesische Basis

Lorentz-Transformation

Betrachte elektromagnetische Kugelwelle (Lichtblitz zur Zeit t ausgesendet bei $\vec{x} = 0$) Inertialsystem wo die Quelle ruht

$$\vec{x}^2 = c^2 t^2$$



Wellenfront zur Zeit t

Michelson-Morley-Experiment + Spezielles Relativitätsprinzip (7)

$\Rightarrow$ Auch in Inertialsystem, das sich relativ zu Σ glf. bewegt, ist das eine Kugelwelle. Wir nehmen an, daß zur Zeit $t=0$ auch $t'=0$ und daß dann Ursprünge der Koordinatensysteme übereinstimmen

$$\Rightarrow \Sigma': \vec{x}'^2 = c^2 t'^2$$

$\Rightarrow$ Für Wellenfronten bleibt "Raum-Zeit-Abstand" ungeändert

$$\vec{x}^2 - c^2 t^2 = \vec{x}'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

Minkowski: Betrachte Raum-Zeit als vierdimensionalen Raum mit Vektoren

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ict \end{pmatrix}$$

Dabei ist $i^2 = -1$ (i = imaginäre Einheit) und damit ist

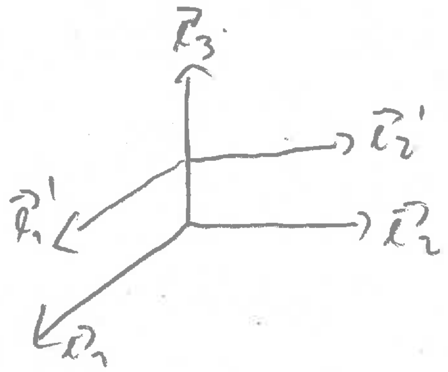
$$\underline{x} \cdot \underline{x} = \underline{x}' \cdot \underline{x}'$$

Beachte: "Skalarprodukt" nicht mehr positiv definit, weil $x_4 = ict$ rein imaginär ist.

Wie transformieren wir nun $\underline{x}$ nach $\underline{x}'$? Nehmen wir an, daß $\underline{x} \cdot \underline{x} = \underline{x}' \cdot \underline{x}'$ für alle $\underline{x}$ gilt, dann ist sicher die Forderung für Lichtwellenfronten erfüllt.

Damit sich Ursprung von Σ' glf. gegen Σ mit Geschwindigkeit $\vec{v} = \text{const}$ bewegt, muß die Trafo linear sein, und damit $\underline{x} \cdot \underline{x} = \underline{x}' \cdot \underline{x}'$ für alle $\underline{x}$ gilt, muß Trafo orthogonal sein.

Bewege sich Σ' mit $\vec{v} = v\,\vec{e}_3$ relativ zu Σ und seien die Basisvektoren für die Raumkomponenten parallel



dann $x_1' = x_1$; $x_2' = x_2 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & L \\ 0 & 0 & M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$\underline{x}' = \hat{\Lambda}\,\underline{x}$; $\hat{\Lambda}$ orthogonal

$\Leftrightarrow$ Zeilen- und Spaltenvektoren kartesische Basis!

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} K^2 + L^2 &= M^2 + N^2 = K^2 + M^2 = L^2 + N^2 = 1 \\ KL + MN &= KM + LN = 0 \end{aligned}}$$

Wie hängen K, L, M, N von v ab?

Betrachte gewöhnliche physikalische Größen, d.h. setze

$$\begin{pmatrix} x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ \underbrace{ict}_{x_4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_3' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K\,x_3 + L\,ict \\ M\,x_3 + N\,ict \end{pmatrix}$$

Ursprung der z'-Achse: $x_3' = 0$ ⑨

$$\Rightarrow Kx_3 + Lict = 0 \Rightarrow Kx_3 = -icLt \stackrel{!}{=} Kvt$$

$$\Rightarrow -icL = v \Rightarrow \boxed{L = i\frac{v}{c}K} \quad (1)$$

Aus Orthogonalitätsrelationen

$$K^2 + L^2 = K^2 - \underbrace{\frac{v^2}{c^2}}_{\beta^2} K^2 = K^2(1-\beta^2) \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{K^2 = \frac{1}{1-\beta^2}} \ (3)$$ Da $K \in \mathbb{R}$ sein muß, folgt

$$\boxed{|\beta| = \left|\frac{v}{c}\right| < 1} \quad (4)$$

Geschwindigkeit zwischen Inertialsystemen muß immer kleiner als Lichtgeschwindigkeit sein.

Für $v=0$ muß $K = N = 1$ sein $\Rightarrow$

$$\boxed{K = +\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = :\gamma} \quad (5)$$

Orthogonalitätsrelationen:

$$K^2 + L^2 = L^2 + N^2 \Rightarrow K^2 = N^2 \Rightarrow \boxed{N = +\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \ (6)$$

(damit für $\beta = 0 \Rightarrow N = 1$).

Orthogonalitätsrelationen

$$KL + MN = 0$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^2 i\beta + M\gamma = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = -i\beta\gamma = -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Für physikalische Größen folgt

$$x_3' = Kx_3 + Lx_4 = \gamma\left[x_3 + i\beta(ict)\right]$$

$$x_3' = \gamma(x_3 - \beta ct) = \gamma(x_3 - vt)$$

$$x_4' = ict' = Mx_3 + Nx_4$$

$$= -i\beta\gamma x_3 + \gamma(ict)$$

$$\Rightarrow t' = -\frac{i}{c}(-i\beta\gamma x_3 + i\gamma ct)$$

$$= -\frac{\beta}{c}\gamma x_3 + \gamma t = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_3\right)$$

Zusammengefaßt

$$x_3' = \frac{x_3 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_3}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Lorentz-Invarianz der Wellengleichung

Wir zeigen, daß die Gleichung für Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, invariant unter Lorentztransformationen ist. Diese Wellengleichung lautet

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Dabei ist

$$\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3^2} \quad ; \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}$$

Nabla-Operator im $\mathbb{R}^3$

Man kann die Invarianz sehr leicht zeigen, indem man die Gleichung „kovariant" also mit Hilfe der Komponenten des Raum-Zeit-Vierervektors schreibt. Es ist

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ict \end{pmatrix}$$

Eine naheliegende Verallgemeinerung des $\vec{\nabla}$-Operators im $\mathbb{R}^3$ ist einfach

$$\underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \\ \partial_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} \\ \partial_4 \end{pmatrix}$$

Es ist offenbar

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_4} = \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_4}$$

Wegen $x_4 = ict \Rightarrow t = -i\frac{x_4}{c} \Rightarrow$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_4} = -\frac{i}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Dann folgt

$$\Box\psi = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\psi = \underline{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}\partial_1\psi\\ \partial_2\psi\\ \partial_3\psi\\ -\frac{i}{c}\partial_t\psi\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\partial_1^2\psi + \partial_2^2\psi + \partial_3^2\psi}_{\Delta\psi} + \left(-\frac{i}{c}\partial_t\right)\left(-\frac{i}{c}\partial_t\psi\right)$$

$$= \Delta\psi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi$$

$\Box$ heißt D'Alembert-Operator.

Es liegt nahe, daß $\Box$ ein skalarer Operator ist, d.h. sich unter Lorentztransformationen nicht ändert. Das wollen wir nun beweisen.

Betrachten wir zuerst $\underline{\nabla}\psi$. Es sei

$$\underline{x}' = \hat{\Lambda}\underline{x} \Leftrightarrow \underline{x} = \Lambda^{-1}\underline{x}' \quad (LT)$$

mit der orthogonalen Lorentz-Transformationsmatrix $\hat{\Lambda}$, für die $\hat{\Lambda}^{-1} = \hat{\Lambda}^T$ gilt.

Dann folgt für $j \in \{1,2,3,4\}$

$$\partial_j'\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_j'} = \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j'}$$ (Kettenregel für partielle Ableitungen)

$$\stackrel{(LT)}{=} \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}(\Lambda^{-1})_{kj}$$

$$\stackrel{\hat{\Lambda}\text{ orthogonal}}{=} \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}(\Lambda^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{4}\Lambda_{jk}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla}' \psi = \hat{\Lambda} \underline{\nabla} \psi$$

$\underline{\nabla}\psi$ transformiert sich also wie ein Vierervektor

Daraus folgt weiter

$$\Box' \psi = \underline{\nabla}' \cdot (\underline{\nabla}' \psi) = \sum_{j=1}^{4} \partial_j' \partial_j' \psi$$

$$= \sum_{j=1}^{4} \partial_j' \sum_{k=1}^{4} \Lambda_{jk} \partial_k \psi$$

$$= \sum_{j,k,l} \Lambda_{jl} \Lambda_{jk} \partial_l \partial_k \psi$$

$$\overset{\hat{\Lambda}\text{ orthogonal}}{=} \sum_{k,l} \delta_{lk} \partial_l \partial_k \psi = \sum_k \partial_k^2 \psi = \Box \psi$$

$\Box' \psi = \Box \psi$ bedeutet, daß $\Box$ tatsächlich invariant unter Lorentz-Transformationen ist.