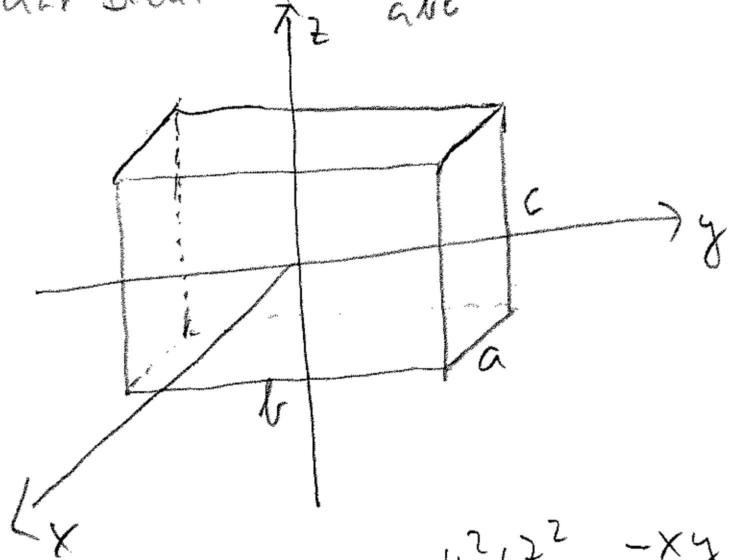
Beispiele für Trägheitstensoren

(1) Quader mit Kantenlängen a, b, c

Homogener Quader hat Dichte $\rho = \frac{m}{abc} = \text{const.}$ Trägheitstensor um Schwerpunkt



$$\hat{\Theta} = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz\ \rho\, m \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

Die Außerdiagonalelemente sind offenbar alle 0. Beispiel

$$\Theta_{12} = -\frac{m}{abc} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz\ xy = 0$$

Diagonalelemente

$$\Theta_{11} = \frac{m}{abc} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz\ (y^2+z^2)$$

$$= \frac{m}{abc} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy\ \left(c y^2 + \frac{c^3}{12}\right)$$

$$= \frac{m}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy\ \left(y^2 + \frac{c^2}{12}\right)$$

$$\Theta_{11} = \frac{m}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dx \left(\frac{b^3}{12} + \frac{c^2 b}{12} \right)$$

$$= \frac{m}{ab} \, a \left(\frac{b^3}{12} + \frac{c^2 b}{12} \right) = \frac{m}{12} (b^2 + c^2)$$

Zyklisches Vertauschen der Richtungen:

$$\Theta_{22} = \frac{m}{12} (c^2 + a^2)$$

$$\Theta_{33} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\Theta} = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

2. Kugel (Schwerpunkt)

$$\rho = \frac{m}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{3m}{4\pi R^3}$$

Hier führt man zum Integrieren Kugelkoordinaten ein. Es gilt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} 0 \le r \le R \\ 0 \le \vartheta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array}$$

Das Volumenelement an der Stelle $\vec{r}$ ergibt sich aus dem Spatprodukt der Koordinatenlinienelemente

$$d^3\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$$

③

$$\frac{d^3\vec{r}}{dr\,d\vartheta\,d\varphi} = \left[\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix} \times r\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\cos\vartheta\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix}\right]\cdot r\begin{pmatrix}-\sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\varphi\sin\vartheta\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= r^2\sin\vartheta\begin{pmatrix}-\sin\varphi\sin^2\vartheta - \sin\varphi\cos^2\vartheta\\ \cos\varphi\cos^2\vartheta + \cos\varphi\sin^2\vartheta\\ x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= r^2\sin\vartheta\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= r^2\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \hat{\Theta} = \frac{3m}{4\pi R^3}\int_0^R dr\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix}y^2+z^2 & -xy & -xz\\ -xy & x^2+z^2 & -yz\\ -xz & -yz & x^2+y^2\end{pmatrix}$$

$$r^2\sin\vartheta$$

Die Außerdiagonalelemente verschwinden wieder aus Symmetriegründen. Beispiel:

$$\Theta_{12} = -\frac{3m}{4\pi R^3}\int_0^R dr\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi\ \underbrace{r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi\sin^2\vartheta}_{xy}\cdot r^2\sin\vartheta$$

Es ist

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\sin\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1}{2}\sin(2\varphi) = -\frac{1}{4}\cos(2\varphi)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

usw.

Die Diagonalelemente sind alle gleich (Symmetrie) am einfachsten ist der Wert durch Θ_{33} bestimmt

$$\Theta_{33} = \frac{3m}{4\pi R^3} \int_0^R dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{r^2 \sin^2\vartheta \; r^2 \sin\vartheta}_{r^4 \sin^3\vartheta}$$

$$= \frac{3m}{4\pi R^3} \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi\text{-Integral}}}{2\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ r\text{-Integral}}}{\frac{R^5}{5}} \int_0^\pi d\vartheta \sin^3\vartheta$$

$$= \frac{3m}{10\pi} R^5 \int_0^\pi d\vartheta \sin^3\vartheta$$

Standardsubstitution

$$u = \cos\vartheta \; ; \; du = -d\vartheta \sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi d\vartheta \sin^3\vartheta = \int_{-1}^1 du \sin^2\vartheta$$

$$= \int_{-1}^1 du \, (1-u^2) = 2\int_0^1 du (1-u^2)$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \Theta_{33} = \Theta_{11} = \Theta_{22} = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\Rightarrow \hat{\Theta} = \frac{2}{5} m R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$