Übungen zur Theoretischen Physik 2 – Blatt 13

Hinweis: Die Aufgaben auf diesem Blatt sind als zusätzliches Angebot zum Einüben des Lagrange-Formalismusses gedacht. Es gibt kein Tutorium mehr, in dem diese besprochen werden können.

Aufgabe 51: Massenpunkt auf Kugel (Kategorie A)

Eine Punktmasse m bewege sich unter dem Einfluß des homogenen Schwerefelds der Erde $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ auf einer Kugeloberfläche vom Radius R.

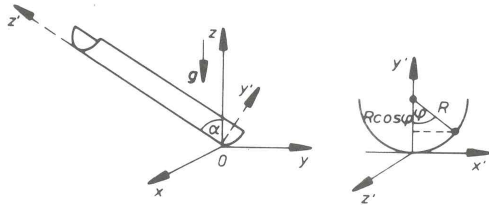
(a) In welcher Höhe z_0 springt der Massenpunkt von der Kugeloberfläche ab, wenn er sich anfangs im höchsten Punkt der Kugel im labilen Gleichgewicht befindet und dann eine infinitesimale Anfangsgeschwindigkeit erhält?

Hinweis: Verwenden Sie die Lagrangegleichungen 1. Art in geeigneten generalisierten Koordinaten, indem Sie die Nebenbedingung, daß sich der Massenpunkt auf einer Kugeloberfläche bewegen soll, mittels eines Lagrange-Parameters einführen und betrachten Sie die enstprechende generalisierte Zwangskraft.

(b) Lösen Sie das Bewegungsproblem mit Hilfe der Lagrangegleichungen 2. Art. Welche Koordinate ist zyklisch und was bedeutet die daraus folgende Erhaltung des dazu kanonisch konjugierten Impulses physikalisch?

Aufgabe 52: Massenpunkt in schräger Rinne (Kategorie A)

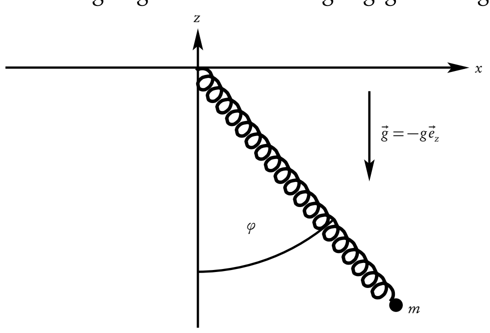
Eine Punktmasse m bewegt sich im homogenen Schwerefeld der Erde $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ auf der Innenseite eines Kreiszylinders des Radiusses R, dessen Achse mit der Vertikalen den Winkel α einschließt. Man bestimme die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichungen.



Aufgabe 53: Federpendel (Kategorie A)

Eine Punktmasse m sei am unteren Ende einer Feder vernachlässigbarer Masse und Federkonstante k angebracht, die am oberen Ende festgehalten wird. Die Länge der Feder in der Ruhelage (ohne Masse m) sei r_0. Das Pendel führe eine ebene Bewegung aus. Man gebe die Lagrange-Funktion des Federpendels an, stelle die Lagrange-Gleichungen auf und interpretiere die einzelnen Terme.

Lösen Sie die für kleine Winkelauslenkungen genäherten Bewegungsgleichungen.



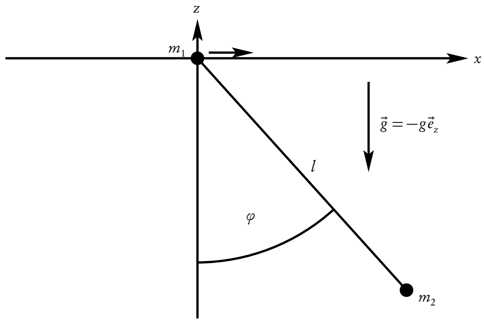
Aufgabe 54: Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt (Kategorie B)
Der Aufhängepunkt eines ebenen Pendels (Länge l, Pendelmasse m_2) sei im homogenen Schwerefeld der Erde $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ in horizontaler Richtung frei beweglich und mit einer Masse m_1 versehen.

(a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion!

(b) Wie lauten die Lagrange-Gleichungen?

(c) Integrieren Sie die Bewegungsgleichungen im Fall kleiner Pendelauslenkungen (lineare Näherung)!

(d) Welche Zwangskräfte wirken auf die beiden Massenpunkte im Fall (c)?



Aufgabe 55: Isoperimetrisches Problem in der Ebene (Kategorie B)
Man finde diejenige geschlossene Kurve in der Ebene, die bei vorgegebener Länge l den größten Flächeninhalt einschließt.
Anleitung: Betrachten Sie dazu eine beliebige Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1],$$

dieser Kurve. Dann berechnet sich die Bogenlänge zu

$$l = \int_0^1 \mathrm{d}t |\dot{\vec{r}}| = \int_0^1 \mathrm{d}t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \tag{1}$$

Die von der Kurve umschlossene Fläche erhält man aus dem Greenschen Satz in der Ebene: Sei $\vec{V}$ ein Vektorfeld. dann gilt

$$\int_F \mathrm{d}^2\vec{x}(\partial_x V_y - \partial_y V_x) = \int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{V}.$$

Setzen wir nun $V_y = x/2$ und $V_x = -y/2$, finden wir

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}t(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Lösen Sie nun das Variationsproblem, dieses Integral unter der Nebenbedingung (1) zu maximieren mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Zur Erinnerung
Die **Klausur** findet am 04.08.2014 von 14:00-17:00h (s.t.) im Otto-Stern-Zentrum in den Hörsälen H2, H3 und H4 statt.

Die **Nachklausur** findet am 02.10.2014 von 10:00-13:00h (s.t.) im Otto-Stern-Zentrum in Hörsaal H1 statt.

Details zur Klausurzulassen etc. finden Sie im E-Learning-Portal.

Viel Erfolg und eine schöne vorlesungsfreie Zeit!