Organisation der Übungen: **Antje Peters** **Raum 2.107** **peters@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 10

vom 22.06.2017, Abgabe am 29.06.2017 in der Vorlesung

20) Nebenrechnungen zur Pauli-Gleichung und zum gyromagnetischen Faktor des Elektrons *(5 + 4 = 9 Punkte)*

(a) Zeige

$$\bigg(\sum_j \sigma_j\Big(-i\partial_j - eA^j(\mathbf{r},t)\Big)\bigg)^2 \quad = \quad \Big(-i\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\Big)^2 - e\vec{\sigma}\mathbf{B}(\mathbf{r},t).$$

(b) Zeige für konstantes magnetisches Feld und $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$

$$\Big(-i\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{r})\Big)^2 \quad = \quad \mathbf{p}^2 - e\mathbf{L}\mathbf{B} + e^2(\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2,$$

wobei $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ und $\mathbf{p} \equiv -i\nabla$.

21) Relativistische Behandlung eines Pions im Coulomb-Potential *(1 + 2 + 3 + 1 + 4 = 11 Punkte)*

Ein Pion π^- ist ein elektrisch negativ geladenes Quark-Antiquark-Paar $d\bar{u}$, d.h. ein Boson mit Ladung $-e$. Zur quantenmechanischen Behandlung eines solchen Pions im Coulomb-Feld eines Z-fach positiv geladenen Atomkers bietet sich die Klein-Gordon-Gleichung an.

(a) Wie lautet die Klein-Gordon-Gleichung eines Pions in einem durch $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ beschriebenen elektromagnetischen Feld?

(b) Betrachte ein zeitunabhängiges Viererpotential $A^\mu(\mathbf{r})$ und ausschließlich Lösungen mit positiver Energie und leite dafür mit einem geeigneten Separationsansatz eine stationäre Klein-Gordon-Gleichung her, d.h. das relativistische Äquivalent zur stationären Schrödinger-Gleichung.

(c) Betrachte nun ein zeitunabhängiges und rotationssymmetrisches Viererpotential $A^\mu(r)$ und benutze erneut einen geeigneten Separationsansatz, um die in (b) gewonnene stationäre Klein-Gordon-Gleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Radialkoordinate r zu reduzieren.

(d) Spezialisiere die in (c) gewonnene Differentialgleichung auf das Coulomb-Potential $\phi(r) = -Ze/r$, $\mathbf{A}(r) = 0$ und zeige, dass Du

$$\bigg(-\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r + \frac{l(l+1) - Z^2e^4}{r^2} - \frac{2Ze^2E}{r} - \Big(E^2 - m^2\Big)\bigg)R(r) \quad = \quad 0$$

erhältst, wobei $R(r)$ den Radialteil der "Klein-Gordon-Wellenfunktion" beschreibt.

(e) Die Lösung dieser Gleichung (siehe z.B. F. Schwabl, "Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II)", Springer, Abschnitt 8.1.2) liefert die Energien

$$E_{nl} = m\left(1 + \frac{Z^2 e^4}{(n - (l + 1/2) + \sqrt{(l + 1/2)^2 - Z^2 e^4})^2}\right)^{-1/2}$$

mit $n = 1, 2, \ldots$ und $l = 0, 1, \ldots, n - 1$. Identifiziere einen kleinen dimensionslosen Parameter und entwickle E_{nl} als Potentzreihe in diesem Parameter. Zeige, dass die niedrigen Ordnungen genau dem Ergebnis entsprechen, das man aus der Schrödinger-Gleichung bei nicht-relativistischer Rechnung erhält (dieses Ergebnis muss nicht berechnet, sondern kann in der Literatur nachgeschlagen werden). Gib in führender Ordnung die aus der Klein-Gordon-Gleichung folgende relativistische Korrektur an. Skizziere das Spektrum für kleine n. Diskutiere dabei, welche Entartungen durch relativistische Effekte aufgehoben werden.