Höhere Quantenmechanik

Prof. Marc Wagner
ITP, Universität Frankfurt - SS 2017

Organisation der Übungen: **Antje Peters** **Raum 2.107** **peters@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 11

vom 29.06.2017, Abgabe am 06.07.2017 in der Vorlesung

22) Rapidität *(2 Punkte)*

Zeige, dass die Hintereinanderausführung zweier Boosts entlang derselben Achse mit Rapiditäten η_1 und η_2 den gleichen Effekt hat wie ein Boost entlang dieser Achse mit Rapidität $\eta = \eta_1 + \eta_2$.

23) Graphischer Nachweis, dass Gruppe SO(3) nichtabelsch ist *(2 Punkte)*

Begründe durch Anfertigen geeigneter und einfach verständlicher Zeichnungen, dass die Gruppe SO(3) eine nicht-Abelsche Gruppe ist, z.B. indem Du in Deinen Skizzen einen Vektor zunächst um die x- und dann um die y-Achse rotierst und danach diese Operationen in umgekehrter Reihenfolge ausführst.

24) Infinitesimale SU(2)-Matrizen *(2 Punkte)*

Zeige, dass es sich bei den in der Vorlesung angegebenen Matrizen $R_j(\alpha) = 1 + i\alpha J_j$ mit $J_j = \sigma_j/2$ um infinitesimale SU(2)-Matrizen handelt.

25) Überlegungen zur Poincare-Algebra *(3 Punkte)*

Begründe anschaulich in Worten und gegebenenfalls durch Anfertigen geeigneter Zeichnungen, warum $[J_x, P_x] = 0$, und $[J_x, P_y] \propto P_z$ ist.

26) Gruppe U(1) *(4 Punkte)*

Die Gruppe U(1) besteht aus den unitären 1×1-Matrizen, wobei die Verknüpfung die Multiplikation ist.

(a) Zeige, dass es sich bei U(1) tatsächlich um eine Gruppe handelt.

(b) Ist die Gruppe abelsch oder nichtabelsch?

(c) Wie sehen infinitesimale U(1)-Transformationen aus?

(d) Bestimme die Erzeugenden und die Algebra der Gruppe U(1).

27) Ergänzungen zur Gruppe SU(2) *(3+2+2=7 Punkte)*

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich SU(2)-Matrizen gemäß $g = e^{+i\alpha_j J_j}$ mit $J_j = \sigma_j/2$ schreiben lassen.

(a) Für konkrete Rechnungen ist häufig der äquivalente Ausdruck

$$g = \cos(|\vec{\alpha}|/2) + i\sin(|\vec{\alpha}|/2)\frac{\alpha_j}{|\vec{\alpha}|}\sigma_j$$

zweckmäßiger, da keine Matrizen im Exponenten auftreten. Zeige, dass die beiden Ausdrücke für g tatsächlich äquivalent sind.

(b) Begründe, dass ein 2-komponentiger Spinor $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, dessen Rotation durch eine SU(2)-Matrix beschrieben wird, nicht nach einer 360°-Rotation, sondern erst nach einer 720°-Rotation wieder seine ursprüngliche Form annimmt. Zeige, dass dies nicht für den Erwartungswert des Spins $\psi^\dagger(\vec{\sigma}/2)\psi$ gilt.

(c) Zeige, dass sich jedes SU(2)-Element g gemäß $g = g_0 + i g_j \sigma_j$ mit $(g_0)^2 + \sum_j (g_j)^2 = 1$ schreiben lässt. Welche geometrische Form hat damit der Parameterraum der Gruppe SU(2)?