Organisation der Übungen: Antje Peters Raum 2.107 peters@th.physik.uni-frankfurt.de

Blatt 3

vom 04.05.2017, Abgabe am 11.05.2017 in der Vorlesung

5) Präparation einer Projektil-Wellenfunktion für ein Streuexperiment *(4 Punkte)*

In der Vorlesung wurde die Wellenfunktion eines Projektils für ein Streuexperiment zu einem Zeitpunkt t_0 vor der Streuung als Wellenpaket geschrieben,

$$\psi(\mathbf{r}, t_0) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, a(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{kr}}.$$

Konstruiere eine geeignete Funktion $a(\mathbf{k})$, die die in der Vorlesung geforderten Eigenschaften für das Projektil sicherstellt, insbesondere, dass es sich um ein Teilchen mit Impuls $\approx \mathbf{k}_0$ handelt, dass bei t_0 noch hinreichend weit vom Potential $V(\mathbf{r})$ (lokalisiert in der Gegend des Ursprungs) entfernt ist, aber zu einem späteren Zeitpunkt das Potential trifft.

6) Greensche Funktion für stationäre freie Schrödinger-Gleichung *(7+2+4+3 Punkte)*

Die freie Schrödinger-Gleichung kann auf die Form

$$\Big(\triangle + k^2\Big)\psi(\mathbf{r}) \quad = \quad 0$$

gebracht werden. In der Vorlesung wurde die Greensche Funktion

$$G_+(\mathbf{r}) \quad = \quad -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{+ikr}}{r} \tag{1}$$

des Differentialoperators $\triangle + k^2$ angegeben.

(a) Führe im Detail die Rechnung aus, die von der Definitionsgleichung

$$\Big(\triangle + k^2\Big)G_+(\mathbf{r}) \quad = \quad \delta(\mathbf{r})$$

auf das angegebene Ergebnis (1) führt. Dazu ist es zweckmäßig, zunächst in den Fourier-Raum zu wechseln und dann mit Hilfe des Residuensatzes die Integration auszuführen. Ist das Ergebnis der Integration eindeutig? Diskutiere den Einfluss der Lage der Polstellen relativ zu Deinem Integrationsweg.

(b) Zeige, dass (1) einen in Form einer Kugelwelle auslaufenden Teilchenstrom beschreibt, indem Du die zugehörige Wahrscheinlichkeitsstromdichte berechnest.

(c) Wähle nun einen anderen Integrationsweg, so dass Du eine Greensche Funktion $G_-(\mathbf{r})$ erhältst, die einen in Form einer Kugelwelle einlaufenden Teilchenstrom beschreibt. Verfiziere dies, indem Du erneut die zugehörige Wahrscheinlichkeitsstromdichte berechnest.

(d) In Abschnitt 2.2 der Vorlesung wurde unter Verwendung von $G_+(\mathbf{r})$ als eines der wesentlichen Ergebnisse

$$\psi(\mathbf{r},t) \quad \approx \quad \psi_{\text{frei}}(\mathbf{r},t) + \int d^3k\, a(\mathbf{k}) \frac{e^{-iE(\mathbf{k})(t-t_0)/\hbar + ikr}}{r} f_{\mathbf{k}}(\vartheta,\varphi)$$

für $|\mathbf{r}| \gg R =$ Potentialreichweite erzielt. Die Verwendung der eine auslaufende Kugelwelle beschreibenden Greenschen Funktion $G_+(\mathbf{r})$ spiegelt sich im zweiten Term in Form von e^{+ikr} wider. Auf den ersten Blick könnte man annehmen, dass die Rechnungen in Abschnitt 2.2 in analoger Weise auch mit $G_-(\mathbf{r})$ ausgeführt werden können. Gehe im Detail durch die präsentierte Herleitung und finde dabei heraus, an welcher Stelle die Verwendung von $G_+(\mathbf{r})$ essentiell ist. Beschreibe Deine Beobachtungen dazu ausführlich und diskutiere insbesondere welche Probleme bei Verwendung von $G_-(\mathbf{r})$ auftreten würden.