Organisation der Übungen: Antje Peters Raum 2.107 peters@th.physik.uni-frankfurt.de

Blatt 9

vom 15.06.2017, Abgabe am 22.06.2017 in der Vorlesung

19) Training mit γ-Matrizen *(3+3+3+3+3+3+2=20 Punkte)*

Führe die folgenden lästigen und daher in der Vorlesung übersprungenen Nebenrechnungen aus.

Zu Abschnitt 3.2.2 („Spin"):

(a) Zeige $[\Sigma_j, \alpha_k] = 2i\epsilon_{jkl}\alpha_l$ sowie $[\Sigma_j, \beta] = 0$, wobei $\vec{\Sigma} = \text{diag}(\vec{\sigma}, \vec{\sigma})$.

(b) Zeige $\mathbf{S}^2 = 3/4$, wobei $\mathbf{S} = \vec{\Sigma}/2$.

Verwende dabei nach Möglichkeit ausschließlich Deine Kenntnisse über γ-Matrizen, ohne auf Pauli-Matrizen oder gar explizite Matrixmultiplikation zurückzugreifen.

Zu Abschnitt 3.2.3 („Transformationsverhalten von Spinoren"):

(c) Zeige, dass eine infinitesimale Lorentz-Transformation (infinitesimaler Drehwinkel oder infinitesimale Boost-Geschwindigkeit) stets die Form $\Lambda^\mu{}_\nu = \eta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$ mit $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ hat.

(d) Zeige, ausgehend von der Bestimmungsgleichung für $S(\Lambda)$,

$$\gamma^\nu = S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu,$$

dass für infinitestimale Lorentz-Transformationen

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \quad , \quad \sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

gilt.

(e) Zeige, dass die einer endlichen Lorentz-Transformation entsprechende Transformationsmatrix für Spinoren die Form

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)$$

hat. Wie sind die Einträge von $\epsilon^{\mu\nu}$ zu wählen für (i) einen Boost in x-Richtung mit Relativgeschwindigkeit v, (ii) eine Rotation um die x-Ache mit Drehwinkel α?

Zu Abschnitt 3.2.4 ("Bilineare Kovarianten"):

(f) Zeige, dass $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ die Transformationseigenschaften von Vierervektoren aufweist.

(g) Welchen Gesamtspin weist das durch die folgende Wellenfunktion beschriebene 3-Teilchensystem

$$\psi_1(x)\Big(\bar{\psi}_2(x)\psi_3(x)\Big)$$

auf, wenn ψ_1, ψ_2 und ψ_3 Dirac-Spinoren sind, deren räumliche Struktur jeweils sphärisch symmetrisch um den Ursprung zentriert ist?