Höhere Quantenmechanik

SoSe 2023 – Prof. Marc Wagner

Lasse Müller: lmueller@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 1

Abgabe bis 25.04.23, 12 Uhr. Besprechung in den Tutorien am 26.04. und 28.04.23.

Aufgabe 1 [*Messungen in der Quantenmechanik am Beispiel von Spins*] (1+1+2+2+2+1+1=10 Pkt.)

Der Spin eines Teilchens $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ mit Gesamtspin 1/2 wird im Rahmen der Quantenmechanik durch drei Operatoren beschrieben, die die Drehimpulsalgebra erfüllen,

$$[\hat{s}_j, \hat{s}_k] \quad = \quad i\epsilon_{jkl}\hbar\hat{s}_l, \tag{1}$$

und durch 2×2 Matrizen dargestellt.

(a) Gib eine entsprechende Darstellung der drei Spinoperatoren an.

(b) Finde Eigenvektoren und Eigenwerte der drei Spinoperatoren.

(c) Ein System befindet sich in dem Eigenzustand von $\hat{s}_x$, dem der Eigenwert $+\hbar/2$ zugeordnet ist. Berechne den Erwartungswert einer Messung von s_y. Welche Messergebnisse treten auf? Gib die Wahrscheinlichkeit jedes möglichen Messergebnisses an.

(d) Das System ist in demselben Zustand präpariert wie zu Beginn von Teilaufgabe (c). Berechne den Erwartungswert einer Messung des Spins in Richtung $(+1, +1, 0)/\sqrt{2}$, d.h. entlang einer Achse, die im 45°-Winkel zur x-Achse steht. Welche Messergebnisse treten mit welchen Wahrscheinlichkeiten auf?

(e) Das System ist in demselben Zustand präpariert wie zu Beginn von Teilaufgabe (c). Zunächst wird eine Messung des Spins in Richtung $(+1, +1, 0)/\sqrt{2}$ durchgeführt. Berechne den Erwartungswert einer danach stattfindenden Messung von $\hat{s}_y$. Welche Messergebnisse treten mit welchen Wahrscheinlichkeiten auf?

Gib Darstellungen der Drehimpulsalgebra (1) sowohl für Operatoren als auch für die zugehörigen Zustände an, sodass die Eigenwerte von $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$ und $\hat{s}_z$ jeweils $+\hbar$, 0 und $-\hbar$ sind. Benutze dazu für die Operatoren

(f) 3×3 Matrizen,

(g) geeignete Kombinationen von $\mathbf{r}$ und ∇.

Welche physikalischen Systeme werden von den von dir gefundenen Darstellungen beschrieben?

Aufgabe 2 [*Orts- und Impulsraumdarstellung*] (2+2+2=6 Pkt.)

In der Vorlesung wurde diskutiert, dass Orts- und Impulsoperator für ein Teilchen in 1 Raumdimension z.B.

- gemäß $\hat{p} \equiv -i\hbar(d/dx)$, $\hat{x} = x$ (Ortsraumdarstellung) oder
- gemäß $\hat{p} = p$, $\hat{x} \equiv +i\hbar(d/dp)$ (Impulsraumdarstellung)

dargestellt werden können.

(a) Formuliere die Eigenwertgleichung für den Hamilton-Operator mit beliebigem Potential $V(x)$ (d.h. die stationäre Schrödinger-Gleichung) einmal in Ortsraumdarstellung und einmal in Impulsraumdarstellung. Warum ist die Ortsraumdarstellung für die meisten Potentiale zweckmäßiger? Diskutiere mathematische Probleme in der Impulsraumdarstellung z.B. bei Verwendung eines Kastenpotentials.

(b) Gib die Lösungen der Eigenwertgleichungen (sowohl Eigenwerte als auch Eigenfunktionen) in beiden Darstellungen für das Potential $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ an. Ist hier die Eigenwertgleichung in Ortsraum- oder Impulsraumdarstellung zweckmäßiger?

(c) Bestimme durch explizite Rechnung die Eigenwerte und Eigenfunktionen in beiden Darstellungen für ein freies Teilchen.

Aufgabe 3 [*Zeitentwicklung*] `(4 Pkt.)`

Betrachte ein Teilchen in einer Raumdimension im unendlich hohen Kastenpotential,

$$V(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq L \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das Teilchen im durch die Wellenfunktion

$$\psi(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \Big(\sin(\pi x/L) + \sin(2\pi x/L) \Big)$$

beschriebenen Zustand präpariert. Bestimmte die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens als Funktion von Ort x und Zeit t. Visualisiere Dein Ergebnis mit Hilfe eines Computers, z.B. indem Du diese Wahrscheinlichkeit für einige feste x als Funktion von t (beziehungsweise umgekehrt) zeichnest.