Höhere Quantenmechanik

SoSe 2023 – Prof. Marc Wagner

Lasse Müller: lmueller@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 2

Abgabe bis 02.05.23, 12 Uhr. Besprechung in den Tutorien am 03.05 und 05.05.23.

Aufgabe 1 [*Zwei-Zustandssystem*] `(2+6+3=11 Pkt.)`

Wir betrachten einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Basis $\mathcal{B} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, wobei die beiden Zustände $|0\rangle, |1\rangle$ Eigenzustände des Hamiltonoperators H_0 sind, d.h.,

$$H_0|i\rangle = E_i|i\rangle, i = 0, 1. \tag{1}$$

Bei $t = 0$ ist das System in dem Zustand $|0\rangle$.

(a) Gib den Zustand des Systems für spätere Zeiten $t > 0$ an (nimm dabei an, dass kein Messprozess stattfindet). Zeige, dass dieser die zeitabhängige Schrödingergleichung erfüllt.

(b) Betrachte nun einen zusätzlichen zeitabhängigen Beitrag, sodass der Hamiltonoperator die Form

$$H(t) = H_0 + H_1(t) \tag{2}$$

hat. Die Matrixelemente von H_1(t) in der Basis $\mathcal{B}$ sind gegeben durch

$$\langle n|H_1(t)|m\rangle = \begin{cases} \omega_0\, \mathrm{e}^{i\omega t} & \text{für } n = 0, m = 1 \\ \omega_0\, \mathrm{e}^{-i\omega t} & \text{für } n = 1, m = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(i) Gib $H(t)$ in Matrixdarstellung bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ an.

(ii) Führe eine exakte Berechnung (d. h. ohne Verwendung von Störungstheorie) der Übergangswahrscheinlichkeit $P_{0\to 1}(t)$ von dem Zustand $|0\rangle$, der bei $t = 0$ präpariert wurde, zu dem Zustand $|1\rangle$ durch.
Hinweis: Beim Lösen der zeitabhängigen Schrödingergleichung tritt ein System gekoppelter Differentialgleichungen auf.

(c) Berechne dieselbe Übergangswahrscheinlichkeit wie in (b), indem du zeitabhängige Störungstheorie in erster Ordnung verwendest. Diskutiere die Güte deiner Approximation, indem du ihren Gültigkeitsbereich untersuchst.

Aufgabe 2 [*Zweite Ordnung in zeitabhängiger Störungstheorie*] `(4+5=9 Pkt.)`

(a) In der Vorlesung wurde die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Initialzustand $|i\rangle$ zu einem Endzustand $|f\rangle$ für einen zeitabhängigen Hamiltonian der Form $H_0 + \lambda H_1(t)$ bis zur führenden Ordnung in zeitabhängiger Störungstheorie hergeleitet. Führe diese Herleitung fort, indem du die Beiträge zur Übergangswahrscheinlichkeit der nächsten Ordnung in λ (d. h. Terme $\sim \lambda^3$) berechnest.

(b) Wir betrachten nun einen eindimensionalen harmonischen Oszillator, der sich zur Zeit $t = -\infty$ im Grundzustand $|0\rangle$ befindet. Das System wird durch ein schwaches zeitabhängiges Potential

$$V(x,t) = -eEx \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) \tag{3}$$

gestört. Berechne in 2. Ordnung Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit das System zur Zeit $t = +\infty$ im zweiten angeregten Zustand $|2\rangle$ zu finden.