Höhere Quantenmechanik

SoSe 2023 – Prof. Marc Wagner

Lasse Müller: lmueller@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 6

Abgabe bis 30.05.23, 12 Uhr. Besprechung in den Tutorien am 31.05 und 02.06.23.

Aufgabe 1 [*Höhere Partialwellenbeiträge bei Streuung an undurchdringlicher Kugel*] `(2+3+3=8 Pkt.)`

In der Vorlesung wurde der Partialwellenbeitrag für $l = 0$ für die Streuung an einer undurchdringlichen Kugel, beschrieben durch das Potential

$$V(r) \quad = \quad \begin{cases} +\infty & \text{falls } r \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

berechnet.

(a) Betrachte die Fälle $kR = 2$ und $kR = 0.2$. Ist jeweils zu erwarten, dass der Partialwellenbeitrag σ_0 eine gute Näherung des totalen Wirkungsquerschnitts darstellt, d.h. $\sigma \approx \sigma_0$ gilt? Begründe Deine Antwort.

(b) Bestimme die Partialwellenbeiträge für $l = 1$ und $l = 2$. Gib sowohl die Streuphasen $\delta_l(E)$ als auch die Beiträge zum totalen Wirkungsquerschnitt σ_l an. Beobachtest du mit steigendem l Konvergenz?
Hinweis: Die Streuphasen ergeben sich aus einer Gleichung, die nur für $l = 0$ einfach analytisch zu lösen ist. Verwende daher entweder einen Computer oder löse die Gleichung auf graphischem Weg durch eine maßstabsgetreue Zeichnung.

(c) Plotte den differentiellen Wirkungsquerschnitt näherungsweise, indem Du die folgenden Partialwellenbeiträge berücksichtigst:

- $l = 0$.
- $l = 0$ und $l = 1$.
- $l = 0$, $l = 1$ und $l = 2$.

In welchem der Fälle ist die Streuung isotrop? Begründe dies, anhand Dir bekannter Gleichungen. Beobachtest Du bei den drei von Dir berechneten und gezeichneten Näherungen bereits Anzeichen von Konvergenz?

Aufgabe 2 [*Streuung am Yukawa-Potential, Bornsche Näherung*] `(4+4+3+1=12 Pkt.)`

Betrachte im Folgenden Streuung am Yukawa-Potential

$$V(r) \quad = \quad A\frac{e^{-\lambda r}}{r} \text{ mit } \lambda > 0,$$

welches in der Physik häufig Anwendung findet und z.B. Kräfte zwischen Protonen und Neutronen beschreibt, die durch Pionaustausch vermittelt werden.

(a) Berechne in Bornscher Näherung die Streuamplitude $f(\vartheta)$.

(b) Zeige, ausgehend von Deinem Ergebnis in (a), dass der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) \quad = \quad \frac{A^2}{(4E_k(\sin(\vartheta/2))^2 + \hbar^2\lambda^2/2m)^2}$$

ist.

(c) Welches Potential und welchen differentiellen Wirkungsquerschnitt erhält man im Grenzfall $\lambda \to 0$? Ist die Bornsche Näherung und sind die in der Vorlesung diskutierten Grundlagen der Streutheorie in diesem Grenzfall zulässig? Vergleiche Dein Ergebnis für den differentiellen Wirkungsquerschnitt mit dem näherungsfreien Ergebnis aus der Literatur.

(d) Diskutiere den Unterschied zwischen einem repulsiven ($A > 0$) und einem attraktiven ($A < 0$) Potential anhand der Streuphase $f(\vartheta)$ sowie des differentiellen Wirkungsquerschnittes $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta)$. Was ändert sich qualitativ, wenn die Bornsche Näherung bis zur zweiten Ordnung durchgeführt wird? **(Keine Rechnung erforderlich)**