

# HÖHERE QUANTENMECHANIK

SoSe 2023 – PROF. MARC WAGNER

LASSE MÜLLER: [lmuller@itp.uni-frankfurt.de](mailto:lmuller@itp.uni-frankfurt.de)

MARC WINSTEL: [winstel@itp.uni-frankfurt.de](mailto:winstel@itp.uni-frankfurt.de)

## Aufgabenblatt 8

Abgabe bis 13.06.23, 12 Uhr. Besprechung in den Tutorien am 14.06 und 16.06.23.

### Aufgabe 1 [Kontinuitätsgleichung für Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung] (3+1=4 Pkt.)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung eine Kontinuitätsgleichung  $\partial_\mu j^\mu = 0$  erfüllen.

- Berechne sowohl für eine Lösung mit positiver Energie als auch für eine Lösung mit negativer Energie die Dichte  $\rho$  und den Strom  $\mathbf{j}$ , wobei  $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ .
- Diskutiere anhand Deiner Ergebnisse aus (a) eine mögliche Interpretation von  $\rho$  als Wahrscheinlichkeits- und als elektrische Ladungsdichte.

### Aufgabe 2 [Dirac-Gleichung in 2 Raumzeitdimensionen] (4 Pkt.)

Betrachte die Dirac-Gleichung in einer Welt mit nur 2 Raumzeitdimensionen. Finde eine geeignete Darstellung der  $\gamma$ -Matrizen mit minimaler Matrixgröße. Ist die von Dir gefundene Darstellung eindeutig? Finde die Lösungen der Dirac-Gleichung in 2 Raumzeitdimensionen. Diskutiere Unterschiede der physikalischen Eigenschaften der Lösungen in 2 und 4 Raumzeitdimensionen, insbesondere im Hinblick auf den Spin.

### Aufgabe 3 [Dirac-Gleichung und $\gamma$ -Matrizen] (3+2+4+3=12 Pkt.)

- Verifiziere durch explizites Ausrechnen die wesentliche Eigenschaft der  $\gamma$ -Matrizen,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (1)$$

Es ist dabei zweckmäßig, dein Wissen über die Eigenschaften der Pauli-Matrizen auszunutzen.

- Zeige, dass eine Lösung  $\psi(x)$  der Dirac-Gleichung  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$  auch komponentenweise die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt, d.h. dass

$$(\square + m^2)\psi(x) = 0 \quad (2)$$

gilt.

- (c) Zeige, dass die in der Vorlesung genannte Kontinuitätsgleichung  $\partial_\mu j^\mu = 0$  mit  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  für Lösungen der Dirac-Gleichung gilt. Berechne  $j^\mu$  sowohl für Lösungen mit positiver Energie als auch für Lösungen mit negativer Energie.
- (d) In der Vorlesung wurde die sogenannte „Standarddarstellung“ für die  $\gamma$ -Matrizen angegeben. Es existieren weitere äquivalente Darstellungen, zum Beispiel die „chirale Darstellung“ (auch „Weyl-Darstellung“ genannt)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

wobei  $\mathbb{I}_2$  die  $2 \times 2$  Einheitsmatrix ist und  $\sigma^j$  die Pauli-Matrizen sind.

- Zeige, dass der Wechsel von einer zur anderen Darstellung über eine lineare Transformation der vier Spinkomponenten von  $\psi$  erfolgt. Konstruiere diese lineare Transformation.
- Die Standarddarstellung eignet sich für schwere beziehungsweise nicht-relativistische Teilchen, da zwei Spinkbzomponenten von  $\psi$  in diesem Fall nahezu verschwinden. Welche Eigenschaften müssen Teilchen besitzen, damit eine ähnliche Aussage in der chiralen Darstellung zutrifft?