Höhere Quantenmechanik

SoSe 2023 – Prof. Marc Wagner

Lasse Müller: lmueller@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 9

Abgabe bis 20.06.23, 12 Uhr. Besprechung in den Tutorien am 21.06 und 23.06.23.

Aufgabe 1 [*Training mit γ-Matrizen*] (3+3+3+2=11 Pkt.)

(a) Zeige, dass eine infinitesimale Lorentz-Transformation (infinitesimaler Drehwinkel oder infinitesimale Boost-Geschwindigkeit) stets die Form

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu} \tag{1}$$

mit $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ hat.

(b) Zeige, ausgehend von der Bestimmungsgleichung für $S(\Lambda)$,

$$\gamma^{\nu} \quad = \quad S(\Lambda)\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda)\Lambda^{\nu}{}_{\mu}, \tag{2}$$

dass für infinitesimale Lorentz-Transformationen

$$S(\Lambda) \quad = \quad 1 - \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \quad , \quad \sigma_{\mu\nu} \quad \equiv \quad \frac{i}{2}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]. \tag{3}$$

gilt.

(c) Zeige, dass die einer endlichen Lorentz-Transformation entsprechende Transformationsmatrix für Spinoren die Form

$$S(\Lambda) \quad = \quad \exp\left(-\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) \tag{4}$$

hat. Wie sind die Einträge von $\epsilon^{\mu\nu}$ zu wählen für (i) einen Boost in x-Richtung mit Relativgeschwindigkeit v, (ii) eine Rotation um die x-Achse mit Drehwinkel α?

(d) Zeige, dass $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ die Transformationseigenschaften von Vierervektoren aufweist.

Aufgabe 2 [*Chiralität, γ_5 Matrix*] (1+2+3 = 6 Pkt.)

Wir betrachten eine weitere Matrix

$$\gamma^{5} \equiv i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}, \tag{5}$$

welche hermitesch und selbstinvers ist.

(a) Zeige, dass γ^5 mit den Matrizen γ^ν anti-kommutiert, d.h. dass

$$\{\gamma^5, \gamma^\nu\} = 0 \tag{6}$$

gilt.

(b) Betrachte die Operatoren $P_{R/L} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma_5)$. Zeige zunächst, dass $P_{R/L}$ Projektionsmatrizen sind, indem du

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0, \quad P_L + P_R = \mathbb{1} \tag{7}$$

prüfst. Wende $P_{R/L}$ auf die Lösungen der Dirac-Gleichung ψ an. Verwende dabei einmal die Standarddarstellung und einmal die chirale Darstellung. Vergleiche dein Resultat mit dem Ergebnis von Blatt 8, Aufgabe 3(d).

(c) Betrachte die Dirac-Gleichung in der chiralen Basis für $\psi = (\psi_L, \psi_R)^T$, wobei $\psi_{R/L}$ zweikomponentige Spinoren, auch Weyl-Spinoren genannt, sind. Setze für $\psi_{R/L}$ eine ebene Welle ein und analysiere die resultierende Gleichung für den ultra-relativistischen Fall $m = 0$. Zu welchem Operator h sind $\psi_{R/L}$ Eigenvektoren? Interpretiere dein Resultat im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie, wobei du von ultra-relativistischen Geschwindigkeiten $v = |\mathbf{v}| \approx c$ ausgehen kannst. Diskutiere den Unterschied deiner Analyse im Fall $m \neq 0$. *Hinweis: Es ist hilfreich,* $p^0 = E = \sqrt{\mathbf{p^2} + m^2}$ *zu verwenden.*

Aufgabe 3 [*Chiralität in 2 Raumzeitdimensionen*] `(1+2=3 Pkt.)`

Betrachte die Dirac-Gleichung in 2 Raumzeitdimensionen. Verwende die chirale Basis der γ-Matrizen, gegeben durch

$$\gamma^0 = \sigma_1, \gamma^1 = \mathrm{i}\sigma_2. \tag{8}$$

Die Lösung der Dirac-Gleichung $\psi = (\psi_L, \psi_R)^T$ besteht aus zwei Komponenten, d.h. $\psi_{R/L}$ beschreiben jeweils 1 Spinorkomponente.

(a) Gib die Matrix γ^{ch} an, welche das 2-dimensionale Analogon zur dem Operator γ^5 in 4 Raumzeitdimensionen darstellt. Beachte dabei, dass γ^{ch} selbstinvers und hermitesch sein soll.

(b) Analysiere die Dirac-Gleichung für $m = 0$. Gib eine Interpretation der Subskripte R/L der Spinorkomponenten an.