Höhere Quantenmechanik

SoSe 2023 – Prof. Marc Wagner

Lasse Müller: lmueller@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 10

Abgabe bis 27.06.23, 12 Uhr. Besprechung in den Tutorien am 28.06 und 30.06.23.

Aufgabe 1 [*Nebenrechnungen zur Pauli-Gleichung*] `(5+4 Pkt.)`

(a) Zeige

$$\left(\sum_j \sigma_j\Big(-i\partial_j - eA^j(\mathbf{r},t)\Big)\right)^2 \quad = \quad \Big(-i\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\Big)^2 - e\vec{\sigma}\mathbf{B}(\mathbf{r},t).$$

(b) Zeige für konstantes magnetisches Feld und $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$

$$\Big(-i\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{r})\Big)^2 \quad = \quad \mathbf{p}^2 - e\mathbf{L}\mathbf{B} + e^2(\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2,$$

wobei $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ und $\mathbf{p} \equiv -i\nabla$.

Aufgabe 2 [*Relativistische Behandlung eines Pions im Coulomb-Potential*] `(1+2+3+1+4=11 Pkt.)`

Ein Pion π^- ist ein elektrisch negativ geladenes Quark-Antiquark-Paar $d\bar{u}$, d.h. ein Boson mit Ladung $-e$. Zur quantenmechanischen Behandlung eines solchen Pions im Coulomb-Feld eines Z-fach positiv geladenen Atomkerns bietet sich die Klein-Gordon-Gleichung an.

(a) Wie lautet die Klein-Gordon-Gleichung eines Pions in einem durch $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ beschriebenen elektromagnetischen Feld?

(b) Betrachte ein zeitunabhängiges Viererpotential $A^\mu(\mathbf{r})$ und ausschließlich Lösungen mit positiver Energie und leite dafür mit einem geeigneten Separationsansatz eine stationäre Klein-Gordon-Gleichung her, d.h. das relativistische Äquivalent zur stationären Schrödinger-Gleichung.

(c) Betrachte nun ein zeitunabhängiges und rotationssymmetrisches Viererpotential $A^\mu(r)$ und benutze erneut einen geeigneten Separationsansatz, um die in (b) gewonnene stationäre Klein-Gordon-Gleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Radialkoordinate r zu reduzieren.

(d) Spezialisiere die in (c) gewonnene Differentialgleichung auf das Coulomb-Potential $\phi(r) = -Ze/r, \mathbf{A}(r) = 0$ und zeige, dass Du

$$\left(-\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r + \frac{l(l+1) - Z^2e^4}{r^2} - \frac{2Ze^2E}{r} - \big(E^2 - m^2\big)\right)R(r) = 0 \qquad (1)$$

erhältst, wobei $R(r)$ den Radialteil der "Klein-Gordon-Wellenfunktion" beschreibt.

(e) Die Lösungen dieser Gleichung (siehe z.B. F. Schwabl, "Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II)", Springer, Abschnitt 8.1.2) liefert die Energien

$$E_{nl} = m \left(1 + \frac{Z^2 e^4}{(n - (l + 1/2) + \sqrt{(l + 1/2)^2 - Z^2 e^4})^2} \right)^{-1/2} \tag{2}$$

mit $n = 1, 2, ...$ und $l = 0, 1, ..., n-1$. Identifiziere einen kleinen dimensionslosen Parameter und entwickle E_{nl} als Potenzreihe in diesem Parameter. Zeige, dass die niedrigen Ordnungen genau dem Ergebnis entsprechen, das man aus der Schrödinger-Gleichung bei nicht-relativistischer Rechnung erhält (dieses Ergebnis muss nicht berechnet werden, sondern kann in der Literatur nachgeschlagen werden). Gib in führender Ordnung die aus der Klein-Gordon-Gleichung folgende relativistische Korrektur an. Skizziere das Spektrum für kleine n. Diskutiere dabei, welche Entartungen durch relativistische Effekte aufgehoben werden.