Höhere Quantenmechanik

SoSe 2023 – Prof. Marc Wagner

Lasse Müller: lmueller@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 11

Abgabe bis 04.07.23, 12 Uhr. Besprechung in den Tutorien am 05.07 und 07.07.23

Aufgabe 1 [*Gruppeneigenschaften von SO(3), SU(2), U(1) und der Poincare Gruppe*] (3+3+3+4=13 Pkt.)

(a) Begründe durch Anfertigen geeigneter und einfach verständlicher Zeichnungen, dass die Gruppe SO(3) eine nicht-Abelsche Gruppe ist, z.B. indem Du in Deinen Skizzen einen Vektor zunächst um die x- und dann um die y-Achse rotierst und danach diese Operationen in umgekehrter Reihenfolge ausführst.

(b) Zeige, dass es sich bei den in der Vorlesung angegebenen Matrizen $R_j(\alpha) = 1 + i\alpha J_j$ mit $J_j = \sigma_j/2$ um infinitesimale SU(2)-Matrizen handelt.

(c) Begründe anschaulich in Worten und gegebenenfalls durch Anfertigen geeigneter Zeichnungen, warum für die Poincare Gruppe $[J_x, P_x] = 0$, und $[J_x, P_y] \propto P_z$ gilt.

(d) Die Gruppe U(1) besteht aus den unitären 1×1-Matrizen, wobei die Verknüpfung die Multiplikation ist.

- Zeige, dass es sich bei U(1) tatsächlich um eine Gruppe handelt.
- Ist die Gruppe abelsch oder nichtabelsch?
- Wie sehen infinitesimale U(1)-Transformationen aus?
- Bestimme die Erzeugenden und die Algebra der Gruppe U(1).

Aufgabe 2 [*Weitere Eigenschaften der SU(2)-Gruppe*] (3+2+2=7 Pkt.)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich SU(2)-Matrizen gemäß $g = e^{+i\alpha_j J_j}$ mit $J_j = \sigma_j/2$ schreiben lassen.

(a) Für konkrete Rechnungen ist häufig der äquivalente Ausdruck

$$g \quad = \quad \cos(|\vec{\alpha}|/2) + i\sin(|\vec{\alpha}|/2)\frac{\alpha_j}{|\vec{\alpha}|}\sigma_j \tag{1}$$

zweckmäßiger, da keine Matrizen im Exponenten auftreten. Zeige, dass die beiden Ausdrücke für g tatsächlich äquivalent sind.

(b) Begründe, dass ein 2-komponentiger Spinor $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, dessen Rotation durch eine SU(2)-Matrix beschrieben wird, nicht nach einer 360°-Rotation, sondern erst nach einer 720°-Rotation wieder seine ursprüngliche Form annimmt. Zeige, dass dies nicht für den Erwartungswert des Spins $\psi^\dagger(\vec{\sigma}/2)\psi$ gilt, sondern dieser sich bereits nach 360° wiederholt.

(c) Zeige, dass sich jedes SU(2)-Element g gemäß $g = g_0 + i g_j \sigma_j$ mit $(g_0)^2 + \sum_j (g_j)^2 = 1$ schreiben lässt. Welche geometrische Form hat damit der Parameterraum der Gruppe SU(2)?