Höhere Quantenmechanik

SoSe 2023 – Prof. Marc Wagner

Lasse Müller: lmueller@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 12

Abgabe bis 11.07.23, 12 Uhr. Besprechung in den Tutorien am 12.07 und 14.07.23.

Aufgabe 1 [*U(1)-Eichtheorie*] (6+5=11 Pkt.)

In der Vorlesung wurde skizziert, warum es sich bei der Elektrodynamik um eine U(1)-Eichtheorie handelt. Dazu wurden die gekoppelten Wellen- bzw. Feldgleichungen

$$\Big((\partial^\mu + ieA^\mu)(\partial_\mu + ieA_\mu) + m^2\Big)\phi \quad = \quad 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \quad = \quad 4\pi ie\Big(\phi^*((\partial^\nu + ieA^\nu)\phi) - ((\partial^\nu + ieA^\nu)\phi)^*\phi\Big)$$

betrachtet.

(a) Zeige, dass beide Gleichungen invariant unter einer U(1)-Eichtransformation

$$\phi'(x) \quad = \quad g(x)\phi(x) \quad , \quad A'^\mu(x) \quad = \quad g(x)\bigg(A^\mu(x) + \frac{i}{e}\partial^\mu\bigg)g^{-1}(x)$$

mit $g(x) \in \mathrm{U}(1)$ sind.

(b) Neben $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ gibt es nur eine weitere Kombination, in der A^μ linear und ∂_μ quadratisch auftritt, die eichinvariant ist und die sich als Baustein für eine unter Poincare-Transformationen forminvariante Gleichung eignet. Finde diesen Term und konstruiere daraus eine Dir bekannte Gleichung. Schränkt diese Gleichung A^μ in irgendeiner Weise ein? Falls nein, warum und unter welchen Umständen ist diese Gleichung dennoch nutzbringend?

Aufgabe 2 [*Transformationsverhalten von Dirac-Spinoren in Standard- und chiraler Darstellung*] (4+2+3=9 Pkt.)

In der Vorlesung wurde auf unterschiedlichen Wegen das Transformationsverhalten eines 4-komponentigen Dirac-Spinors hergeleitet. In der Standard-Darstellung wurde

$$\psi' \quad = \quad \exp\bigg(-\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\bigg)\psi \quad , \quad \sigma_{\mu\nu} \quad \equiv \quad \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{1}$$

angegeben, in der chiralen Darstellung

$$\tilde{\psi}' \quad = \quad \begin{pmatrix} e^{+i\alpha_j\sigma_j/2+\eta_j\sigma_j/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\alpha_j\sigma_j/2-\eta_j\sigma_j/2} \end{pmatrix}\tilde{\psi}. \tag{2}$$

Hierbei sind α_j Rotationswinkel und η_j Rapiditäten. Zeige, dass beide Gleichungen äquivalent sind. Gehe dazu z.B. wie folgt vor:

(a) Zeige, dass die erste der beiden Gleichungen auch in der chiralen Darstellung gilt, wenn man $\psi \to \tilde{\psi}$ und $\gamma^\mu \to \tilde{\gamma}^\mu$ ersetzt.

(b) Stelle die Verbindung zwischen den Parametern $\epsilon^{\mu\nu}$ und α_j, η_j her, z.B. indem Du Lorentz-Transformationen betrachtest, die auf Vierervektoren wirken.

(c) Verwende deine Ergebnisse aus (a) und (b), um das Transformationsverhalten aus Gl. (2) zu zeigen.