Organisation Übungen: **Dr. Christopher Pinke** **Raum 2.105** **pinke@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 1

vom 16.10.2015, Abgabe am 23.10.2015 in der Vorlesung

1) Vektorrechnung (schriftlich) *(2+3=5 Punkte)*

Betrachten Sie die Basisvektoren eines kartesischen Koordinatensystems $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ und $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$. Jeder beliebige Vektor kann dann geschrieben werden als $\vec{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$.

(a) Das sogenannte Kronecker-Delta δ_{ij} kann definiert werden als

$$\delta_{ij} \equiv \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{, für } i = j \\ 0 & \text{, für } i \neq j \end{cases} .$$

(i) Verifizieren Sie obige Eigenschaften.

(ii) Das Kronecker-Delta ist eine hilfreiche Größe, zum Beispiel in Summationen. Zeigen Sie, dass für $i \in \{1,2,3\}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} i = i \ .$$

(b) Eine weitere hilfreiche Größe ist der sogenannte Levi-Civita-Tensor. Dieser kann definiert werden als

$$\epsilon_{ijk} \equiv \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) \ ,$$

wobei i,j,k jeweils die Werte $1,2$ und 3 annehmen können.

(i) Welche Werte kann ϵ_{ijk} annehmen? Welche Systematik gibt es hier? Identifizieren Sie drei mögliche Fälle.

(ii) Drücken Sie das Vektorprodukt $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ durch ϵ_{ijk} aus, d.h. zeigen Sie das gilt:

$$c_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \ .$$

2) Vektoridentitäten (schriftlich) *(1+3+1=5 Punkte)*

(a) Überzeugen Sie sich, dass die folgenden Identitäten gelten:

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

sowie

$$\sum_{p=1}^{3} \delta_{ip} a_p = a_i \ .$$

(b) Zeigen Sie, das für Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ gilt (*baccab*-Regel):

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \ .$$

(c) Beweisen Sie die Jacobi-Identität

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0 \ .$$

Hinweis: Benutzen Sie b).

3) Ebenengleichung (mündlich) *(2+3=5 Punkte)*

Die Punkte $\boldsymbol{x}$ einer Ebene seien durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

Weiterhin sei eine Gerade $\boldsymbol{y}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

(a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von Ebene und Gerade.

(b) Die Ebene kann auf verschiedene Arten beschrieben werden. Bringen Sie die Ebene auf die sogenannte Normalenform

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \ ,$$

wobei $\boldsymbol{n}$ der auf 1 normierte Normalenvektor der Ebene sei und der Stützvektor $\boldsymbol{p}$ ein beliebiger Vektor der Ebene ist. Skizzieren Sie die Ebene sowie $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{p}$.

4) Trajektorien (mündlich) *(2+3=5 Punkte)*

Betrachten Sie die folgenden Bewegungen in kartesischen Koordinatensystemen. Überlegen Sie sich jeweils, wie die Trajektorien $\boldsymbol{r}(t)$ mathematisch beschrieben werden und geben Sie, möglichst knapp, $\boldsymbol{r}(t)$ an. Hierbei ist es ausreichend, die Zeitabhängigkeit durch trigonometrische Funktionen auszudrücken.

(a) Ein Massenpunkt pendele zwischen $(-A, 0, 0)$ und $(A, 0, 0)$ hin und her (der sogenannte harmonischer Oszillator). Bei $t = 0s$ sei er im Punkt $(A, 0, 0)$.

(b) Ein Massenpunkt bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einem Kreis mit Radius R um den Ursprung. Bei $t = 0s$ sei er im Punkt $(R, 0, 0)$ und bei $t = 1s$ im Punkt $(0, R, 0)$.

Welche Einheiten müssen die vorkommenden Größen jeweils haben? Mit welcher Geschwindigkeit v bewegt sich der Massenpunkt auf dem Kreis?