Organisation Übungen: **Dr. Christopher Pinke** **Raum 2.105** **pinke@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 4

vom 06.11.2015, Abgabe am 13.11.2015 in der Vorlesung

13) Fallschirmspringer (schriftlich) *(4+1+2=7 Punkte)*

Betrachten Sie einen Fallschirmspringer der Masse m, welcher zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Höhe $z = 0$ über dem Erdboden seinen Fallschirm geöffnet hat und vertikal nach unten falle. Der Fallschirm verursacht eine der (als konstant angenommenen) Erdanziehung entgegenwirkende Kraft, welche proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit sei, $F = \beta v^2$ (quadratische Reibungskraft). Beim Öffnen seines Fallschirms habe der Springer eine Geschwindigkeit von v_0.

(a) Bestimmen Sie $v(t)$, indem Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung mittels der Methode der Trennung der Variablen lösen. Das Resultat sollte von der Form

$$v(t) = A \tanh\left(B\left(C - t\right)\right)$$

sein, mit positiven Konstanten A, B, C.

Hinweis: Es gilt $\int dx 1/(a - x^2) = \tanh^{-1}(x/\sqrt{a})/\sqrt{a} +$ *const. Hierbei ist* $\tanh^{-1}$ *die Umkehrfunktion des tangens hyperbolicus* $\tanh$. *Vergewissern Sie sich, dass Ihre Lösung die richtige Dimension hat, bspw. das das Argument des* $\tanh$ *dimensionlos ist.*

(b) Zeigen Sie, dass der Springer für große Zeiten t eine konstante Fallgeschwindigkeit $-\sqrt{mg/\beta}$ erreicht.

(c) Zeigen Sie, dass für $\beta \to 0$ der Fallschirmsprung in einen freien Fall übergeht. Hierzu kann es nützlich sein, die Geschwindigkeit mithilfe des Additionstheorems

$$\tanh(\alpha - \beta) = \frac{\tanh(\alpha) - \tanh(\beta)}{1 - \tanh(\alpha)\tanh(\beta)}$$

umzuschreiben. *Hinweis: Benutzen Sie* $\tanh(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ *für kleine* x.

14) Radioaktiver Zerfall (schriftlich) *(3+2=5 Punkte)*

Betrachten Sie einen radioaktiven Zerfall, welcher nach dem Gesetz

$$\frac{d}{dt} N = -kN$$

abläuft. Hierbei ist N die Menge des noch vorhandenen radioaktiven Stoffes (z.B. die Anzahl der Atome) und k die Zerfallskonstante, welche die Reaktionsgeschwindigkeit beschreibt.

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung sowohl mit einem Exponentialansatz als auch mit der Methode der Trennung der Variablen.

(b) Die Hälfte der Substanz sei nach 10s verbraucht. Wie lange dauert es, bis 90% des Stoffes zerfallen sind?

15) Zeitabhängige Kraft (mündlich) *(4 Punkte)*

Betrachten Sie die folgende zeitabhängige (aber nicht ortsabhängige) Kraft:

$$\mathbf{F}(t) = (A \sin(\omega t), Bt, C) \ ,$$

mit positiven Konstanten A, B und C. Diese beschreibt also eine periodische Beschleunigung in x-, eine zunehmende Beschleunigung in y-Richtung sowie eine konstante Beschleunigung in z-Richtung. Berechnen Sie die Trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$ einer Masse, welche sich unter dem Einfluß dieser Kraft bewegt. Die Startbedingungen zur Zeit $t = 0$ seien mit $\boldsymbol{v}_0$ und $\boldsymbol{r}_0$ gegeben.

16) Taylor-Näherung (mündlich) *(2+2=4 Punkte)*

(a) Berechnen Sie die Taylor-Näherung der folgenden Funktionen bis zur dritten Ordnung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$2x, \ \sin(x), \ \cos(x), \ \tan(x), \ \sinh(x), \ \cosh(x), \ \tanh(x), \ (1+x)^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(b) Betrachten Sie eine Kreisbewegung einer Masse in der x-y-Ebene,

$$\boldsymbol{r}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t)) \ ,$$

mit positivem R und ω. Entwickeln Sie $\boldsymbol{r}(t)$ in einem Taylorpolynom für kleine Zeiten t bis mindestens Ordnung 5. Skizzieren Sie, wie die Reihe die tatsächliche Funktion immer besser annähert, je mehr Terme hinzugefügt werden. *Hinweis: Benutzen Sie bspw.* `gnuplot`*, um sich die Situation zu verdeutlichen.*