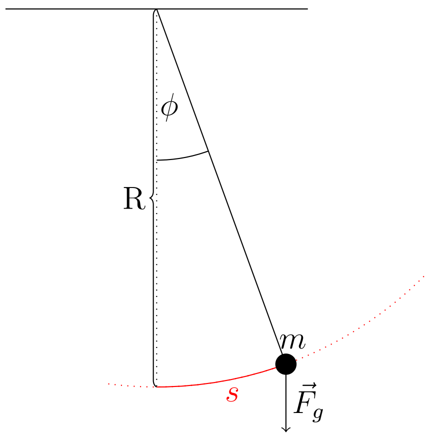
Organisation Übungen: **Dr. Christopher Pinke** **Raum 2.105** **pinke@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 5

vom 13.11.2015, Abgabe am 20.11.2015 in der Vorlesung

17) Fadenpendel (schriftlich) *(2+2+1=5 Punkte)*

Betrachten Sie einen an einem Faden der Länge R aufgehängten Massenpunkt (Masse m), der in einer Ebene unter Einfluss der Schwerkraft ($|\vec{F}_g| = mg$) pendelt.



(a) Stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Auslenkung $s(t) = R\phi(t)$ auf (siehe Skizze). Drücken Sie diese nun durch den Auslenkwinkel ϕ aus. Um die Bewegungsgleichung analytisch lösen zu können, führen Sie nun eine Taylor-Näherung der rücktreibenden Kraft für kleine Winkel ϕ in führender nichtverschwindener Ordnung aus.

(b) Lösen Sie die genäherte Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $\phi(t=0) = 0$ und $\dot{\phi}(t=0) = \Omega$. Mit welcher Frequenz pendelt der Massenpunkt?

(c) Plotten Sie $\frac{x}{\sin(x)}$ in dem Bereich $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Ab welchem Auslenkwinkel ϕ_c überschreitet die Differenz zwischen rücktreibender Kraft und ihrer Näherung 10%? (Bestimmen Sie ϕ_c graphisch aus Ihrem Plot.)

18) Harmonischer Oszillator in zwei Dimensionen (schriftlich) *(2+2+1=5 Punkte)*

Betrachten Sie einen zweidimensionalen ungedämpften Harmonischen Oszillator. Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \omega_x^2 x \\ \omega_y^2 y \end{pmatrix} = 0.$$

(a) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} x(t=0) \\ y(t=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t=0) \\ \dot{y}(t=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und zeichnen Sie die Trajektorie in der x-y-Ebene für sowohl $\omega_x = \omega_y$ als auch für $\omega_x = 2\omega_y$.

(b) Welche Anfangsbedingungen führen im Fall $\omega_x = \omega_y$ zu einer kreisförmigen Trajektorie mit dem Radius R?

(c) Geben Sie die allgemeinste Beziehung zwischen ω_x und ω_y an, so dass die Trajektorie eine geschlossene Bahn bildet, d.h. dass sie sich nach endlicher Zeit exakt wiederholt.

19) Komplexe Zahlen (mündlich) *(1+1+1+1+1+1=6 Punkte)*

(a) Berechnen Sie für die folgenden Ausrücke jeweils den Realteil und den Imaginärteil: $(-\mathrm{i})^3, \mathrm{i}^{44415}, \sqrt{4(-25)}, \log(1+\mathrm{i}), \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$.

(b) Zeichnen Sie die folgenden Punkte sowie deren komplex Konjugiertes in die komplexe Zahlenebene ein:
$z_1 = -1 - \mathrm{i}, z_2 = -3 + \frac{1}{2}\mathrm{i}, z_3 = 3 + 2\mathrm{i}, z_4 = \frac{3}{2}\mathrm{i}, z_5 = 1, z_6 = e^{3\pi \mathrm{i}}$

(c) Konstruieren Sie die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahlen:
$z_1 = \mathrm{i} - 1, z_2 = -(1+\mathrm{i}), z_3 = \mathrm{e}^{3+2\mathrm{i}}, z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}, z_5 = -\mathrm{i}$.

(d) Berechnen Sie die Produkte. Führen Sie die Rechnung für die ersten beiden Beispiele sowohl in der Polardarstellung, als auch in der kartesischen Darstellung aus und vergleichen Sie die Ergebnisse aus den beiden Darstellungen. Berechnen Sie das dritte Beispiel in der Darstellung Ihrer Wahl.

- $(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$
- $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$
- $(1+\mathrm{i})^{13}(1-\mathrm{i})^7$.

(e) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:
$z_1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\pi\mathrm{i}}, z_2 = \mathrm{e}^{-1-\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}, z_3 = \mathrm{e}^{3-\mathrm{i}}$.

(f) Bestimmen Sie die Länge der Vektoren $(1,2)$ und $(-3,4)$ in der x-y-Ebene sowie den Betrag der komplexen Zahlen $1+2\mathrm{i}$ und $-3+4\mathrm{i}$. Addieren Sie sowohl die beiden komplexen Zahlen, als auch die beiden Vektoren.

20) Taylor-Näherung II (mündlich) *(1+1+2=4 Punkte)*

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in einer Taylor-Näherung um $x_0 = 0$ bis zur zweiten Ordnung in x. A sei eine Konstante.

(a) $f_1(x) = \left(\mathrm{e}^{-Ax} - 1\right)^2$

(b) $f_2(x) = \left(\mathrm{e}^{-Ax^2} - 1\right)^2$

(c) $f_3(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-Ax}}{\cos^2(x)}\right)$

Hinweis: Nähern Sie die komplizierten Funktionen durch "Ineinandereinsetzen" der elementaren Funktionen an. Hierfür ist es zweckmäßig, die Näherungen der folgenden Funktionen bis zur zweiten Ordnung auswendig zu kennen: $e^{-Ax}, \ln(1+x), \cos(x), \frac{1}{1-x}$. *Berechnen Sie diese gegebenenfalls.*