**Organisation Übungen:** **Dr. Christopher Pinke** **Raum 2.105** **pinke@th.physik.uni-frankfurt.de**

# Blatt 7

vom 27.11.2015, Abgabe am 04.12.2015 in der Vorlesung

## 25) Harmonischer Oszillator (schriftlich) *(1+3+1=5 Punkte)*

Betrachten Sie im Folgenden einen harmonischen Oszillator in einer Dimension.

(a) Zeigen Sie, dass für diesen der Energieerhaltungssatz gilt, d.h. dass $\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(T+V) = 0$. Hierbei sind $T$ und $V$ die kinetische Energie bzw. das Potential.

(b) Berechnen Sie, ausgehend vom Energieerhaltungssatz, die Trajektorie $x(t)$. Zur Zeit $t_0$ habe der Oszillator seinen Maximalausschlag $x_{Max}$ erreicht. $x(t)$ hängt dann von der Gesamtenergie $E$ und $t_0$ ab. *Hinweis: Welchen Wert nimmt die Anfangsbedingung $x_{Max}$ an?*

(c) Wie ändert sich die Lösung, wenn man sie anstatt von $t_0$ in Abhängigkeit von $t_1$ schreibt, wobei $t_1$ die Zeit ist, bei der der Oszillator seine Maximalgeschwindigkeit $v_{max}$ erreicht hat?

## 26) Vektoranalysis (schriftlich) *(2+2+2=6 Punkte)*

(a) Betrachten Sie die sogenannten Polarkoordinaten

$$\boldsymbol{r}(R,\varphi) = (R\cos(\varphi), R\sin(\varphi)) \ .$$

Bestimmen Sie die Vektoren, welche als

$$\boldsymbol{e}_\xi = \partial\boldsymbol{r}/\partial\xi |\partial\boldsymbol{r}/\partial\xi|^{-1} \ , \ \text{mit } \xi \in \{R,\varphi\}$$

definiert sind (und als Basisvektoren der Polarkoordinaten bezeichnet werden). Drücken Sie dann das Differential $d\boldsymbol{r} = (dx, dy)$ in $dR, d\varphi, \boldsymbol{e}_R$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$ aus. Skizzieren und interpretieren Sie ihre Ergebnisse.

Bestimmen Sie anschließend die Richtungsableitungen von

$$R(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

nach $\boldsymbol{e}_R$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$ und erklären Sie ihr Ergebnis geometrisch.

(b) Gegeben sei ein Gebirge, welches durch

$$h(x,y) = \exp(-\sqrt{(x-2.5)^2+(y+3)^2}) - 0.2\sqrt{(x+1.5)^2+(y-2)^2}$$

beschrieben werde. Bestimmen Sie den Gradienten von $h$ und die Maxima, d.h. die Bergspitzen.

(c) Gegeben sei ein Hügel, welcher durch

$$h(x,y) = \exp(-(x^2+y^2)/2)$$

beschrieben werde. Bestimmen Sie die Punkte, an denen der Anstieg am steilsten ist.

**27) Potentiale (mündlich)** ***(1+1+1=3 Punkte)***

Betrachten Sie die folgenden Potentiale

(a) $V(x) = \frac{A}{2}x^2$ (Potential des harmonischer Oszillator)

(b) $V(x) = -\frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{4}x^4$ (das sogenannte "Mexican Hat"-Potential)

(c) $V(x) = -\frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{3}x^3 + \frac{C}{4}x^4$ .

Hierbei seien die Konstanten $A, B, C$ jeweils positiv. Skizzieren Sie die Potentiale und diskutieren Sie stabile und instabile Gleichgewichtslagen sowie Umkehrpunkte, jeweils in Abhängigkeit der Energie $E$.

**28) Arbeit (mündlich)** ***(2+4=6 Punkte)***

(a) Berechnen Sie im Folgenden jeweils die Arbeit, die bei einer Bewegung von $x_1$ nach $x_2$ gegen die Kraft $F$ verrichtet wird.

  (i) $F(x) = -mg$ (Schwerfeld der Erde)

  (ii) $F(x) = -\omega_0^2 m x^2$ (harmonischer Oszillator)

(b) Sie fahren mit einem Auto zur Zeit $t = 0$ von $x_1 = 0$ nach $x_2$, wo Sie zur Zeit $T$ ankommen. Hierbei wirke die Reibungskraft $F = -\alpha\dot{x}^2$ auf ihr Auto. Welche Arbeit muss gegen die Reibungskraft aufgewendet werden, wenn sich das Auto gemäß

  (i) $x(t) = v_0 t$

  (ii) $x(t) = \frac{1}{2}at^2$

bewegen soll? Geben Sie das Ergebnis jeweils in Abhängigkeit von $x_2$ und $T$ an. Wie ändert sich jeweils die zu verrichtende Arbeit, wenn der Zielpunkt in der halben bzw. der doppelten Zeit erreicht werden soll? Welche dieser beiden Bahnkurven minimiert die Arbeit? Gibt es eine Bahnkurve $x(t)$, welche zu noch geringerer Arbeit führt?