

Blatt 9

vom 11.12.2015, Abgabe am 18.12.2015 in der Vorlesung

33) Differentialgleichungen (mündlich) (1+2+2=5 Punkte)

- (a) Lösen Sie die Differentialgleichung $\ddot{z} + 4z = 0$ mit den Randbedingungen $z(0) = 0, z(\pi/4) = 1$ bzw. $z(\pi/2) = -1, \dot{z}(\pi/2) = 1$.
- (b) Erraten Sie gezielt jeweils eine spezielle Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen:
- (i) $\ddot{y} + \dot{y} + y = 2t + 3$,
 - (ii) $4\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = -2t + 5$.

Hinweis: Machen Sie einen linearen Ansatz für die spezielle Lösung.

- (c) Bestimmen Sie die vollständige Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen:
- (i) $7\ddot{x} - 4\dot{x} - 3x = 6$,
 - (ii) $\ddot{z} - 10\dot{z} + 9z = 9t$.

34) Potentiale II (schriftlich) (5 Punkte)

Betrachten Sie im Folgenden die Kräfte

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) &= -mg\mathbf{e}_z && \text{(Schwerefeld der Erde) ,} \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) &= -m\omega_0^2\mathbf{r} && \text{(isotroper harmonischer Oszillator) ,} \\ \mathbf{F}_3(\mathbf{r}) &= (ay, ax, b) && (a, b \text{ konstant) .}\end{aligned}$$

Untersuchen Sie, ob die Kräfte konservativ sind. Bestimmen Sie, falls möglich, das jeweilige Potential $V(\mathbf{r})$. *Hinweis: Verwenden Sie hierfür eine der beiden in der Vorlesung angegebenen Methoden, bestimmen Sie V also entweder über das System von Gleichungen $\mathbf{F} = -\nabla V$ oder über das Wegintegral der Arbeit. Beim Wegintegral können Sie von $\mathbf{0}$ bis \mathbf{r} integrieren.*

35) Schneepflug (mündlich) (4 Punkte)

Eine Bergstraße sei mit einer Schneeschicht der Höhe $h = h_0$ bedeckt (h_0 sei konstant). Eine Schneeräummaschine der Breite b fahre diese Straße hinunter, was durch die Trajektorie

$$\mathbf{r}(t) = \left(\alpha t, \frac{2\beta}{3} t^{3/2}, H - \alpha t \right)$$

beschrieben sei. Hierbei ist H die Höhe des Berges, α und β seien positive Konstanten. Für β gelte außerdem $\beta^2 = \alpha^3/H$. Das Fahrzeug fahre zum Zeitpunkt $t = 0$ los. Zu welchem Zeitpunkt T kommt es am Fuße des Berges an (dieser befinde sich bei $z = 0$)? Wieviel Schnee hat die Maschine zu diesem Zeitpunkt bereits geräumt? Wie verändert sich diese Menge wenn die Höhe der Schneeschicht von z abhängt, $h = h(z) = \frac{h_0}{H}z$? *Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Maschine nicht breiter als die Straße ist und der Schnee die Maschine nicht überragt. Es gilt: $\int dx \sqrt{A+Bx}(C-Dx) = \frac{2}{15B^2}(A+Bx)^{3/2}(5BC+2AD-3BDx) + \text{const.}$, mit A, B, C, D konstant und positiv.*

36) Arbeit II (schriftlich) (6 Punkte)

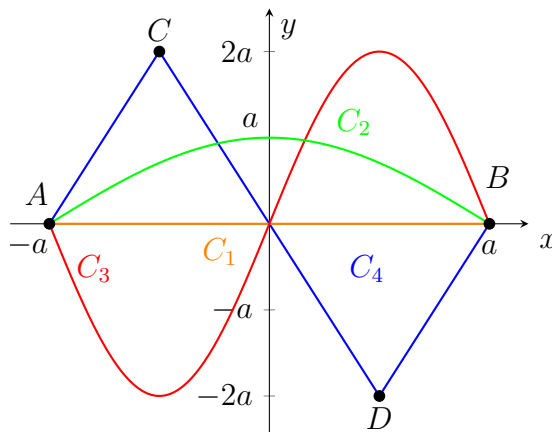
Ein Teilchen bewege sich auf vier unterschiedlichen Wegen von Punkt A zu Punkt B , siehe Figur 4. Punkt A liege bei $(-a, 0)$, Punkt B bei $(a, 0)$, Punkt C bei $(-a/2, 2a)$ und Punkt D bei $(a/2, -2a)$. Bei Weg C_2 und C_3 handelt es sich um eine halbe Kosinus- bzw. eine ganze Sinusschwingung. Parametrisieren Sie die Wege auf geeignete Weise. Berechnen Sie die verrichtete Arbeit für jeden der vier Wege für das Kraftfeld

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = (-mg, -m\omega_0^2 y, 0).$$

Berechnen Sie außerdem die auf den Wegen C_1 und C_2 verrichtete Arbeit für

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}.$$

Hierbei sei $\boldsymbol{\alpha}$ konstant. Testen Sie, ob die Kraftfelder konservativ sind und verwenden Sie diese Resultate zur Interpretation ihrer Ergebnisse. *Hinweis: Eine mögliche Parametrisierung des Weges C_2 ist $(\lambda, a \cos(\frac{\pi\lambda}{2a}))$ mit $\lambda \in [-a, a]$. Weiterhin gilt $\int_{-A}^A \cos(x) \sin(x) dx = 0$ und $\int dx \sin(x)x = -x \cos(x) + \sin(x) + \text{const.}$*



Figur 1: Aufgabe 36: Verschiedene Wege von A nach B .