

Blatt 10

vom 18.12.2015, Abgabe am 15.01.2016 in der Vorlesung

37) Zweikörperproblem (schriftlich) (3+4+3+2=12 Punkte)

Betrachten Sie zwei Massen m_1 und m_2 , welche durch eine Feder verbunden sind und aufeinander die Kraft $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ ausüben. Ansonsten wirken keine weiteren äußeren Kräfte. k sei eine positive Konstante.

- (a) Formulieren Sie das Problem in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten und lösen Sie die entsprechenden Bewegungsgleichungen für $\mathbf{R}(t)$ und $\mathbf{r}(t)$. Bestimmen Sie die Trajektorien $\mathbf{r}_1(t)$ und $\mathbf{r}_2(t)$ der beiden Massen. Skizzieren Sie das Problem.
- (b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die folgenden Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(0) &= (l, 0, 0), & \dot{\mathbf{r}}_1 &= v_0 \frac{m_1}{M} (-1, 1, 0), \\ \mathbf{r}_2(0) &= (0, l, 0), & \dot{\mathbf{r}}_2 &= v_0 \frac{m_2}{M} (1, -1, 0).\end{aligned}$$

Hierbei seien l und v_0 positive Konstanten und M die Gesamtmasse des Systems.

- (c) Bestimmen Sie den Gesamtimpuls \mathbf{P} , die Gesamtenergie E und den Gesamtdrehimpuls \mathbf{L} des Systems. Sind diese Größen erhalten?
- (d) Betrachten Sie die Spezialfälle $m_1 = m_2 \equiv m$ und $m_1 = 2m_2 \equiv 2m$ und diskutieren Sie die qualitativen Unterschiede.

38) Potentiale III (mündlich) (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Potentiale für die folgenden Kräfte, indem Sie das entsprechende Wegintegral lösen:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= -a\mathbf{r} + b\mathbf{r}^2\mathbf{r}, \\ \mathbf{F}_2 &= -m(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})).\end{aligned}$$

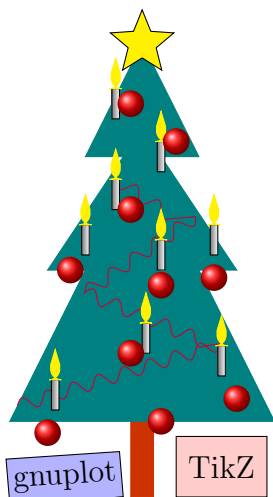
Hierbei seien a, b, m und $\boldsymbol{\omega}$ Konstanten. Integrieren Sie jeweils von $\mathbf{0}$ bis \mathbf{r} . *Hinweis: Oft ist es zweckmäßig, den Integrationsweg so zu wählen, dass man nacheinander die Koordinatenachsen abläuft, so dass gilt*

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r}') = \int_0^x dx' F_x(x', 0, 0) + \int_0^y dy' F_y(x, y', 0) + \int_0^z dz' F_z(x, y, z').$$

39) Mechanik in höheren Dimensionen (mündlich) (2+1=3 Punkte)

Während man sich Mechanik in zwei oder drei Dimensionen gut bildlich vorstellen kann, ist dies in vier oder mehr Dimensionen im Allgemeinen nicht mehr möglich. Dennoch behält die Mathematik weiterhin ihre Gültigkeit und es existieren interessante Theorien in höheren Dimensionen, z.B. Stringtheorie in 25 Raumdimensionen.

- (a) Wie viele Komponenten hat der Impuls \mathbf{p} bzw. der Drehimpuls \mathbf{L} in 4 bzw. d Raumdimensionen? Geben Sie diese durch \mathbf{r} und $\dot{\mathbf{r}}$ ausgedrückt an.
- (b) In $d = 3$ Raumdimensionen erfüllt ein konservatives Kraftfeld $\text{rot}\mathbf{F} = 0$. Wie lauten die äquivalenten Bedingungen in 4 bzw. d Raumdimensionen?



[from matheplanet.com]

Frohe Weihnachten
und einen guten
Rutsch!
