**Organisation Übungen:** **Dr. Christopher Pinke** **Raum 2.105** **pinke@th.physik.uni-frankfurt.de**

# Blatt 11

vom 15.01.2016, Abgabe am 22.01.2016 in der Vorlesung

## 40) Krummlinige Koordinatensysteme I (schriftlich) *(2+2+2+4=10 Punkte)*

Alternativ zu den bekannten kartesischen Koordinaten lassen sich auch andere Koordinatensysteme wählen. Für diese sogenannten krummlinigen Koordinaten lassen sich Basisvektoren über

$$\boldsymbol{e}_{\xi_j} = \partial \boldsymbol{r}/\partial\xi_j |\partial \boldsymbol{r}/\partial\xi_j|^{-1}$$

definieren, wobei $\xi_j$ die jeweilige Koordinatenlinie angibt (siehe auch Blatt 7, Aufgabe 26). Eine weitere wichtige Größe ist die sogenannte Jacobi-Matrix

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial \xi_j}$$

mit den partiellen Ableitungen des Ortsvektors als Einträgen. Diese wird bei der Berechnung von Integralen in krummlinigen Koordinatensystemen im späteren Verlauf des Semesters wichtig werden.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben jeweils für Zylinder- und Kugelkoordinaten, welche Sie, neben den Polarkoordinaten, bereits in der Vorlesung kennengelernt haben. Für Zylinderkoordinaten gilt

$$\boldsymbol{r} = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \quad \text{und } \xi_j \in \{r, \varphi, z\}$$

und für Kugelkoordinaten

$$\boldsymbol{r} = (r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta)) \text{ sowie } \xi_j \in \{r, \theta, \varphi\} \, .$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix sowie deren Determinante.

(b) Bestimmen Sie die Basisvektoren sowie deren Zeitableitung im Fall von zeitabhängigen $\xi_j$. Wie hängen diese mit der Jacobi-Matrix zusammen?

(c) Drücken Sie Ort und Geschwindigkeit durch die Basisvektoren aus.

(d) Bestimmen Sie die kinetische Energie und den Drehimpuls.

*Hinweis: Überzeugen Sie sich, dass für die hier verwendeten Basisvektoren $\boldsymbol{a}_i$ gilt $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$ und $\boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{a}_j = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{a}_k$. Die Determinante einer $3 \times 3$-Matrix läßt sich über die Sarrus-Regel bestimmen. Beispiele für Determinantenberechnungen finden Sie unter anderem im Mathematiktest.*

## 41) Krummlinige Koordinatensysteme II (mündlich) *(2+2+2=6 Punkte)*

Es kann von Vorteil sein, Bewegungsgleichungen in bestimmten geeigneten Koordinatensystemen zu lösen, da die Gleichungen dort besonders einfach sind. Umgekehrt kann eine ungeschickte Koordinatenwahl die Mathematik stark verkomplizieren.

(a) Betrachten Sie zunächst eine kräftefreie Bewegung

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \, ,$$

welche im Ursprung bei $t = 0$ starte, und bestimmen Sie die Lösung wie gewohnt in kartesischen Koordinaten. Formulieren Sie diese Gleichung nun in Zylinderkoordinaten, indem Sie $\ddot{\boldsymbol{r}}$ entsprechend bestimmen. Transformieren Sie die kartesische Lösung der Gleichung ebenfalls in Zylinderkoordinaten und verifizieren Sie, dass diese die Bewegungsgleichung erfüllt. Was fällt Ihnen auf?

(b) Betrachten Sie nun eine Kreisbewegung einer Masse $m$ in der x-y-Ebene:

$$\boldsymbol{r}(t) = (R_0 \cos(\omega t), R_0 \sin(\omega t), 0) \, ,$$

mit $R_0, \omega$ konstant und positiv. Bestimmen Sie die auf die Masse wirkende Kraft sowohl in kartesischen als auch in Zylinderkoordinaten.

(c) Lösen Sie folgende Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten:

$$\dot{R} = 0 \, , \; \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = \omega^2 \frac{\pi}{2} \, , \; \ddot{\varphi} = 0 \, .$$

Die Anfangsbedingungen seien durch

$$R(0) = R_0 \, , \theta(0) = \frac{11\pi}{20}, \dot{\theta}(0) = \omega \frac{\pi}{20} \, , \varphi(0) = \varphi_0 \, , \dot{\varphi}(0) = \varphi_1$$

gegeben, wobei $\omega, R_0, \varphi_0, \varphi_1$ positive Konstanten seien. Um welche Bewegung handelt es sich? Betrachten Sie anschließend der Einfachheit halber den Fall dass $\omega = 0$ ist und transformieren Sie ihre Lösung in kartesische Koordinaten. Welche Bewegung wird jetzt beschrieben? *Hinweis: Beachten Sie, dass $\theta \in [0, \pi]$ gilt.*

## 42) Raketengleichung (mündlich) *(2+2=4 Punkte)*

Betrachten Sie eine Rakete, welche in $z$-Richtung fliege und einen Satelliten der Masse $m_S$ befördere. Die Rakete selbst bestehe aus einem Raketenkörper der Masse $m_R$ und Treibstoff der Masse $m_T$. Ihre Masse verringert sich dabei aufgrund der Treibstoffverbrennung kontinuierlich, dieser werde mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_0$ aus der Rakete ausgestoßen.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das Problem auf. Betrachten Sie hierzu den Impuls des Systems zur Zeit $t$ und zur Zeit $t + \Delta t$, wobei $\Delta t$ positiv sei. Betrachten Sie anschließend die Differenz der beiden Impulse sowie den Grenzfall $\Delta t \to 0$ um die zeitliche Änderung des Impulses $\dot{\boldsymbol{p}}$ zu erhalten.

(b) Berechnen Sie $v(t)$ für den Fall, dass der Treibstoff gleichmäßig ausgestoßen wird und das die Rakete eine konstante Erdbeschleunigung erfährt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Rakete in Ruhe. Welchen Wert nimmt die Geschwindigkeit an, wenn der Treibstoff aufgebraucht ist?