Organisation Übungen: Dr. Christopher Pinke Raum 2.105 pinke@th.physik.uni-frankfurt.de

Blatt 12

vom 22.01.2016, Abgabe am 29.01.2016 in der Vorlesung

43) Kosmische Geschwindigkeiten (mündlich) *(2+2+1=5 Punkte)*

(a) Betrachten Sie einen Satelliten der Masse m_S. Welche Geschwindigkeit v_1 muss er mindestens haben, damit er in einer Kreisbahn um die Erde schwebt? Vernachlässigen Sie Luftreibung. Berechnen Sie den ungefähren numerischen Wert von v_1 indem Sie $G = 6,674 \times 10^{-11} \frac{kgm^3}{s^2}$ (Graviationskonstante), $M = 5.974 \times 10^{24}$ kg (Masse der Erde) und $R_E = 6371$ km (Erdradius) benutzen.

(b) In Aufgabe 42 haben Sie die maximale Geschwindigkeit einer Rakete berechnet, welche einen Satelliten befördert. Ist es realistisch, dass diese Rakete den Satelliten in eine Umlaufbahn um die Erde bringen kann? Betrachten Sie hierzu $v_0 \approx 3$ km/s (Ausstoßgeschwindigkeit des Treibstoffes aus der Rakete) und $\frac{m_R+m_T}{m_R} \approx 10$ (Massenverhältnis von Rakete mit und ohne Treibstoff), was realistische Werte darstellt.

(c) Auf welche Geschwindigkeit v_2 müsste ein auf der Erdoberfläche gestarteter Satellit gebracht werden, um den Schwerebereich der Erde komplett zu verlassen?

44) Kepler-Problem I (schriftlich) *(1+1+2+1+2=7 Punkte)*

Punkte auf einer Ellipse sind durch die Beziehung

$$r_1 + r_2 = const = 2a$$

definiert, wobei r_1 und r_2 die Abstände der beiden Brennpunkte zu dem jeweiligen Punkt auf der Ellipse sind. a wird als große Halbachse bezeichnet. Die Brennpunkte liegen auf der durch die große Halbachse definierten x-Achse bei $(c, 0)$ und $(-c, 0)$. Es gilt $a > c$. Eine weitere wichtige Größe ist die kleine Halbachse b mit $b > 0$, welche den Schnittpunkt der Ellipse mit der y-Achse beschreibt.

Im Rahmen des Kepler-Problems liege im Folgenden die Sonne, um den sich der Planet bewege, im ersten Brennpunkt. Dann bezeichnet $r_1 \equiv r$ den Abstand zwischen den beiden Himmelskörpern, r_2 werde mit R bezeichnet. Wichtig für das Kepler-Problem ist außerdem der Winkel φ zwischen r und der großen Halbachse. Dieser wird so gewählt, dass der Perihel bei $\varphi = 0$ liegt.

(a) Skizzieren Sie die Situation.

(b) Drücken Sie die kleine Halbachse b durch a und c aus.

(c) Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung für das Kepler-Problems hergeleitete Bahnkurve

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \tag{1}$$

eine Ellipse mit

$$k = \frac{a^2 - c^2}{a} \, , \; \epsilon = \frac{c}{a}$$

beschreibt.

Im Gegensatz zu einer Ellipse beschreibt eine Hyperbel keine geschlossene Bahnkurve, sondern eine Trajektorie, welche, aus dem Unendlichen kommend, die Sonne passiert und wiederum ins Unendliche verschwindet. Genauer gilt für Punkte auf der Hyperbel

$$R - r = const = 2a \; .$$

Hierbei gilt nun $a < c$. Es läßt sich jedoch analog zur Ellipse eine Gleichung der Form (1) angeben.

(d) Skizzieren Sie wiederum die Situation. Achten Sie darauf, dass sich, bzgl. der Ellipse, die Position des Perihels verändert hat.

(e) Bestimmen Sie die Parameter k und ϵ aus Gleichung (1) für die Hyperbel.

45) Kepler-Problem II (mündlich) *(2 Punkte)*

In der Vorlesung wurde die Bahnkurve der Relativkoordinate beim Kepler-Problem hergeleitet, siehe Gl. (1). Bestimmen Sie die Beziehung zwischen den Parametern (k, ϵ) und (Drehimpuls l, Energie E) ausgehend von der in der Vorlesung gemachten Definition für k sowie der Gesamtenergie ausgewertet am Perihel. Geben Sie sowohl $k(l, E), \epsilon(l, E)$ als auch $l(k, \epsilon), E(k, \epsilon)$ an.

46) Kepler-Problem III (schriftlich) *(6 Punkte)*

Lösen Sie das Kepler-Problem für den Fall, dass nicht das Newtonsche Graviationsgesetz mit $\boldsymbol{F} \sim \hat{\boldsymbol{r}}/r^2$ gelte, sondern das eine Kraft der Form $\boldsymbol{F} = -\frac{\delta}{r^3}\hat{\boldsymbol{r}}$ wirkt, mit δ konstant und positiv. Bestimmen Sie r als Funktion von φ. Wählen Sie als Anfangsbedingungen der zu lösenden Differentialgleichung $r(0) = R_0, \dot{r}(0) = 0$, mit $R_0 > 0$. Unterscheiden Sie zwei zu lösende, nicht-triviale Fälle und skizzieren Sie jeweils die Lösung.