

Mathematiktest

Dieser Test soll die Mathematikkenntnisse der Studienanfänger evaluieren und wird daher unbenotet durchgeführt.

1) Bruchrechnung

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

$$GL_1 : \frac{x}{x-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2x-4}, \quad GL_2 : 2x + (4 - 2u) \frac{ux+3}{u-1} = 0 .$$

2) Differentiation

Geben Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen an:

i. Elementare Funktionen:

$$f_1(x) = x^8, f_2(x) = \exp(x), f_3(x) = \ln(x), f_4(x) = \cos(x) .$$

ii. Produktregel:

$$f_5(x) = g(x) \cdot h(x), f_6(x) = \cos(x)x^6, f_7(x) = \sin(x) \ln(x) .$$

iii. Quotientenregel:

$$f_8(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, f_9(x) = \frac{x^9+3x^3}{x^4+5ux^2+2}, f_{10}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} .$$

iv. Kettenregel:

$$f_{11}(x) = g(h(x)), f_{12}(x) = \cos(x^2), f_{13}(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2} (\exp(x) - \exp(-x)) .$$

3) Integralrechnung

Berechnen Sie folgende Integrale:

i. Elementare Integrale:

$$I_1 = \int x^5 dx, I_2 = \int \exp(x) dx, I_3(x) = \int_0^\pi \sin(x) dx$$

ii. Partielle Integration:

$$\text{Rechenvorschrift: } \int g(x) \cdot h'(x) dx = g(x) \cdot h(x) - \int g'(x) \cdot h(x) dx$$

$$I_4 = \int x \exp(-x) dx .$$

iii. Integration durch Substitution:

$$\text{Rechenvorschrift: } \int_a^b f(u(x)) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{f(u(x))}{u'(x)} dx$$

$$I_5 = \int_0^2 x \exp(-x^2) dx \quad (\text{Tipp: Wählen Sie } u = x^2)$$

4) Taylorreihenentwicklung

Die Taylorreihe bezeichnet die Entwicklung einer Funktion in einer Potenzreihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x - x_0)^n f^{(n)}(x_0).$$

Berechnen Sie diese für folgende Funktionen bei $x_0 = 0$: $f_1(x) = \cos(x)$, $f_2(x) = \exp(-x)$.

5) Vektorrechnung

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und beantworten Sie folgenden Fragen:

- i. Subtraktion, Längen und Winkel von Vektoren: $\vec{a} - \vec{b}$, $a = |\vec{a}|$ und $\angle(\vec{a}, \vec{b})$
- ii. Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}$
- iii. Sind \vec{a} und \vec{b} linear unabhängig? Liegt \vec{c} in der von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Ebene?

6) Matrizenrechnung

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot B$, B^T , $C - D$, $\det(A)$ und $\det(C)$.

7) Komplexe Zahlen

- i. Elementare Rechenoperationen:

Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 , $\operatorname{Re}(z_1)$ und $\frac{1}{2}(z_1 + z_1^*)$ für $z_1 = 9 - 7i$ und $z_2 = 3 + 2i$.

- ii. Darstellung in Polarform ($z = r \exp(i\theta)$):

- Stellen Sie die folgende Zahl in Polarform dar: $z = -1 - i$.
- Erklären Sie zeichnerisch die eulersche Relation

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

in der komplexen Zahlenebene.