Theoretische Physik 1 - Mathematische Methoden

Wintersemester 2021/2022 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 1

vom 22.10.21, Abgabe am 29.10.21, Besprechung in der Woche vom 01.11.21

Aufgabe 1 [*Rechnen mit Vektoren*] (1.5+1.5+2=5 Pkt.)

Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

1. Berechne: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $a = |\boldsymbol{a}|$ und $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.
2. Berechne das Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ und $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{d}$.
3. Sind $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ linear unabhängig? Liegt $\boldsymbol{c}$ in der von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Ebene?

Aufgabe 2 [*Kronecker-Delta und Levi-Civita-Tensor*] (2+3=5 Pkt.)

Betrachte die Basisvektoren eines kartesischen Koordinatensystems $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ und $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$. Jeder beliebige Vektor kann dann geschrieben werden als $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$.

1. Das sogenannte Kronecker-Delta δ_{ij} kann definiert werden als

$$\delta_{ij} \equiv \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1 & , \text{für } i = j \\ 0 & , \text{für } i \neq j \end{cases} .$$

   (a) Verifiziere die obigen Eigenschaften.

   (b) Das Kronecker-Delta ist eine hilfreiche Größe, zum Beispiel in Summationen. Zeige, dass für $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} i = i .$$

2. Eine weitere hilfreiche Größe ist der sogenannte Levi-Civita-Tensor. Dieser kann definiert werden als

$$\epsilon_{ijk} \equiv \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) ,$$

   wobei i, j, k jeweils die Werte $1, 2$ und 3 annehmen können.

   (a) Welche Werte kann ϵ_{ijk} annehmen? Welche Systematik gibt es hier? Identifiziere drei mögliche Fälle.

(b) Drücke das Vektorprodukt $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ durch ϵ_{ijk} aus, d.h. zeige, dass gilt:

$$c_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \ .$$

Aufgabe 3 [*Vektoridentitäten*] `(1+3+1=5 Pkt.)`

1. Überzeuge dich, dass die folgenden Identitäten gelten:

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

   sowie

$$\sum_{p=1}^{3} \delta_{ip} a_p = a_i \ .$$

   Hinweis: Hier ist kein mathematischer Beweis erforderlich. Es ist stattdessen sinnvoll, die Identitäten anhand einiger Beispiele zu verstehen.

2. Zeige, dass für Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ gilt (*baccab*-Regel):

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \ .$$

   Hinweis: Verwende die Levi-Civita Schreibweise aus Aufgabe 2 2.(b) sowie die Formel aus Aufgabe 3 1.

3. Beweise die Jacobi-Identität

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0 \ .$$

   Hinweis: Benutze die baccab-Regel.

Aufgabe 4 [*Ebenengleichung*] `(2+3=5 Pkt.)`

Die Punkte $\boldsymbol{x}$ einer Ebene seien durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

Weiterhin sei eine Gerade $\boldsymbol{y}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

1. Bestimme den Schnittpunkt von Ebene und Gerade.

2. Die Ebene kann auf verschiedene Arten beschrieben werden. Bringe die Ebene auf die sogenannte Normalenform

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \ ,$$

   wobei $\boldsymbol{n}$ der auf 1 normierte Normalenvektor der Ebene sei und der Stützvektor $\boldsymbol{p}$ ein beliebiger Vektor der Ebene ist. Skizziere die Ebene sowie $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{p}$.