Theoretische Physik 1 - Mathematische Methoden

Wintersemester 2021/2022 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 2

vom 29.10.21, Abgabe am 05.11.21, Besprechung in der Woche vom 08.11.21

Aufgabe 1 [*Vektorrelationen*] (1+1+1+1+1=5 Pkt.)

Wir betrachten zwei Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Beweise die folgenden Relationen:

(a) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = a^2\, b^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$

(b) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$

Hierbei ist $a = |\boldsymbol{a}|$ und $b = |\boldsymbol{b}|$.
Nun betrachten wir zwei vektorielle, zeitabhängige Funktionen $\boldsymbol{r}(t)$ und $\boldsymbol{v}(t)$. Zeige, dass die folgenden Differentiationsregeln gelten:

(c) $\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)\right] = \dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{r}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{v}}(t)$

(d) $\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{v}(t)\right] = \dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{r}(t) \times \dot{\boldsymbol{v}}(t)$

(e) $\boldsymbol{r}(t) \cdot \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) = |\boldsymbol{r}(t)|\, \frac{d}{dt}|\boldsymbol{r}(t)|$

Aufgabe 2 [*Geschwindigkeit und Beschleunigung*] (2+1+2=5 Pkt.)

Die Trajektorie eines Teilchens im Raum wird durch den Ortsvektor

$$\boldsymbol{r}(t) = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(t/t_0)^3 - 2(t/t_0) \\ \sqrt{3}(t/t_0)^2 \\ 2\sqrt{3}(t/t_0) + 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

beschrieben, wobei α und t_0 Konstanten mit Einheit Länge bzw. Zeit sind.

(a) Berechne die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$, deren Betrag $|\boldsymbol{v}(t)|$ sowie die Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t)$ und deren Betrag $|\boldsymbol{a}(t)|$. Vereinfache so weit wie möglich.

(b) Zu welchem Zeitpunkt beträgt die Geschwindigkeit des Teilchens $v = 13\,\alpha/t_0$?

(c) Betrachte den Fall $t_0 = 1\,\mathrm{s}$. Wie muss α gewählt werden, damit die Beschleunigung des Teilchens zum Zeitpunkt $t = 1\,\mathrm{s}$ den Wert $a = 6\,\mathrm{m/s^2}$ annimmt? Wie groß ist die Beschleunigung des Teilchens zu diesem Zeitpunkt in Richtung $\boldsymbol{p} = (2, 1, 2)^T$?

Aufgabe 3 [*Das begleitende Dreibein*] (2+3+5=10 Pkt.)

Betrachten wir eine Kurve im Raum, die durch den Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$ beschrieben wird, so können wir zu jedem Zeitpunkt ein lokales, mitbewegtes Koordinatensystem konstruieren, das seinen Ursprung im Punkt $\boldsymbol{r}(t)$ hat. Dieses Koordinatensystem bezeichnet man als begleitendes Dreibein. Die drei Basisvektoren dieses Koordinatensystems sind der Tangenteneinheitsvektor $\hat{\boldsymbol{t}}$, der Normaleneinheitsvektor $\hat{\boldsymbol{n}}$ und der Binormaleneinheitsvektor $\hat{\boldsymbol{b}}$, die folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{t}}(t) &= \frac{1}{|\boldsymbol{v}(t)|}\boldsymbol{v}(t) \\
\hat{\boldsymbol{n}}(t) &= \frac{1}{\kappa}\frac{1}{|\boldsymbol{v}(t)|}\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{t}}(t) \\
\hat{\boldsymbol{b}}(t) &= \hat{\boldsymbol{t}}(t) \times \hat{\boldsymbol{n}}(t).
\end{aligned}$$

Wie üblich gilt $\boldsymbol{v}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)$. κ bezeichnet die Krümmung der Bahnkurve und ist definiert als $\kappa = \frac{1}{|\boldsymbol{v}(t)|}\left|\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{t}}(t)\right|$. Weiterhin kann die Torsion τ der Bahnkurve aus der Relation $\frac{1}{|\boldsymbol{v}(t)|}\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{b}}(t) = -\tau\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ bestimmt werden.
Wir betrachten nun einen Massenpunkt, der sich auf der Bahnkurve

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t)e^{-\lambda t} \\ R\sin(\omega t)e^{-\lambda t} \\ b\omega t \end{pmatrix}$$

bewegt. Hierbei seien R, ω, λ und b Konstanten ≥ 0.

(a) Welche Bedeutung haben die Konstanten R, ω, λ und b? Skizziere die Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$.
Hinweis: Wenn dir der Verlauf der Bahnkurve unklar ist, kann es sinnvoll sein, sich der vollen Bewegung zu nähern, indem du zunächst die Spezialfälle 1.) $b = 0$, $\lambda = 0$ *sowie 2.)* $\lambda = 0$ *betrachtet.*

Wir betrachten im Folgenden den Spezialfall $\lambda = 0$.

(b) Berechne die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$, deren Betrag $|\boldsymbol{v}(t)|$ sowie die Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t)$ und deren Betrag $|\boldsymbol{a}(t)|$.

(c) Bestimme das begleitende Dreibein, d.h. berechne den Tangenteneinheitsvektor $\hat{\boldsymbol{t}}$, den Normaleneinheitsvektor $\hat{\boldsymbol{n}}$ und den Binormaleneinheitsvektor $\hat{\boldsymbol{b}}$. Gib die Krümmung der Bahnkurve κ explizit an. Berechne zudem die Torsion τ.