Theoretische Physik 1 - Mathematische Methoden

Wintersemester 2021/2022 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 4

vom 12.11.21, Abgabe am 19.11.21, Besprechung in der Woche vom 22.11.21

Aufgabe 1 [*Inertialsysteme*] (2+2=4 Pkt.)

(a) Klassisches Relativitätsprinzip: Zwei Beobachter O und $\bar{O}$ verfolgen die Bewegung eines Teilchens P der Masse m. Zeige, dass das Teilchen nur dann für beide Beobachter dieselbe Kraft erfährt, wenn sich beide mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen. Die Position von P sei $\boldsymbol{r}$ bzw. $\bar{\boldsymbol{r}}$.
Hinweis: Betrachte die Differenz der Kräfte in beiden Koordinatensystemen. Wann verschwindet diese? Die tatsächliche Anordnung der Koordinatensysteme der Beobachter zueinander ist nicht relevant.

(b) Überzeuge dich exemplarisch, dass die Newtonsche Bewegungsgleichung nur in solchen Koordinatensystemen in unveränderter Form gilt, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen. Betrachte hierzu zwei Koordinatensysteme Σ und Σ' mit entsprechenden Koordinaten $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$. Σ sei kräftefrei. Um von Σ zu Σ' zu wechseln, betrachte einmal eine sogenannte Galilei-Transformation der Form

$$\boldsymbol{r} = v_0 t \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{r}'$$

und einmal eine Transformation der Form

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2} b t^2 \boldsymbol{e}_y + v_0 t \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{r}' \; .$$

Wie wirken sich die beiden Transformationen auf die Bewegungsgleichungen aus?

Aufgabe 2 [*Kraftfelder*] (3+2=5 Pkt.)

(a) Die zwischen einer elektrischen Ladung q_1 und einer Testladung $q_t = -q_1$ auftretende Kraft, die Coulomb-Kraft, ist in ihrer Struktur identisch zur Gravitationskraft und lautet

$$\mathbf{F}_{1\to t} = \frac{q_1 q_t}{4\pi\epsilon_0 r_{1t}^2} \hat{\boldsymbol{r}}_{1\to t} \; .$$

Hierbei ist r_{1t} der Abstand zwischen den Ladungen, $\hat{\boldsymbol{r}}_{1\to t}$ die Richtung der Kraft und ϵ_0 eine Konstante.

(i) Skizziere $\mathbf{F}$ für alle möglichen Orte der Testladung q_t (d.h. für den ganzen Raum). Wie sieht $\mathbf{F}$ in der x-y- und der x-z-Ebene aus?

(ii) Wie verändert sich die Situation, wenn die Testladung die Kraft von zwei elektrischen Ladungen q_1 und q_2 verspürt, d.h. welche Kraft wirkt nun auf q_t? q_1 und q_2 seien im Abstand $d > 0$ voneinander angebracht. Falls $q_1 = q_2 \equiv q$ gilt, gibt es einen Ort wo keine Kraft auf q_t wirkt?

(iii) Wir betrachten nun zwei elektrische Ladungen q_1 und q_2 mit $q_1 = q_2 \equiv q$, die an den Orten $\boldsymbol{r}_1 = (0,0,d)^T$ und $\boldsymbol{r}_2 = (0,0,-d)^T$ liegen. Bestimme die Kraft, die auf eine Testladung $q_t = -q$ an der Position $\boldsymbol{r}_t = (0,d,0)^T$ wirkt.

(b) Gegeben sei ein konstantes Magnetfeld $\mathbf{B} = B\boldsymbol{e}_z$. Ein Teilchen mit elektrischer Ladung q bewege sich mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_y$ durch das Magnetfeld. Die Kraft, die durch das Magnetfeld auf das Teilchen ausgeübt wird, lautet

$$\mathbf{F} = q\,(\boldsymbol{v} \times \mathbf{B}) \ \text{(Lorentzkraft)}\ .$$

(i) Zeige, dass $\mathbf{F}$ den Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert, d.h. dass $\frac{d}{dt}|\boldsymbol{v}| = 0$.

(ii) Skizziere qualitativ die Bewegung des Teilchens, indem du dir Kraft, Geschwindigkeit und Ort des Teilchens für verschiedene Zeiten vergegenwärtigst. Welche Art von Bewegung wird das Teilchen ausführen?

Aufgabe 3 [*Fallschirmspringer*] (4+1+2=7 Pkt.)

Betrachte einen Fallschirmspringer der Masse m, welcher zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Höhe $z = 0$ über dem Erdboden seinen Fallschirm geöffnet hat und vertikal nach unten fällt. Der Fallschirm verursacht eine der (als konstant angenommenen) Erdanziehung entgegenwirkende Kraft, welche proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist, $|\boldsymbol{F}_R| = \beta v^2$ (quadratische Reibungskraft). Beim Öffnen seines Fallschirms habe der Springer eine Geschwindigkeit von v_0.

(a) Bestimme $v(t)$, indem du die Newtonsche Bewegungsgleichung mittels der Methode der Trennung der Variablen löst.
Hinweis: Das Resultat sollte von der Form

$$v(t) = A \tanh\left(B\,(C - t)\right)$$

sein, mit positiven Konstanten A, B, C.
Es gilt $\int dx\; 1/(a-x^2) = \tanh^{-1}(x/\sqrt{a})/\sqrt{a} + const.$ *Hierbei ist* $\tanh^{-1}(\dots)$ *die Umkehrfunktion des Tangens hyperbolicus* $\tanh(\dots)$. *Vergewissere dich, dass deine Lösung die richtige Dimension hat, bspw. das das Argument des* $\tanh(\dots)$ *dimensionslos ist.*

(b) Zeige, dass der Springer für große Zeiten t die konstante Fallgeschwindigkeit $-\sqrt{mg/\beta}$ erreicht.

(c) Zeige, dass für $\beta \to 0$ der Fallschirmsprung in einen freien Fall übergeht. Hierzu kann es nützlich sein, die Geschwindigkeit mithilfe des Additionstheorems

$$\tanh(\alpha - \beta) = \frac{\tanh(\alpha) - \tanh(\beta)}{1 - \tanh(\alpha)\tanh(\beta)}$$

umzuschreiben.
Hinweis: Benutze $\tanh(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ *für kleine* x.

Aufgabe 4 [*Zeitabhängige Kraft*] (4 Pkt.)

Betrachte die folgende zeitabhängige (aber nicht ortsabhängige) Kraft:

$$\mathbf{F}(t) = (A\sin(\omega t), Bt, C) \ ,$$

mit positiven Konstanten A, B und C. Diese beschreibt also eine periodisch oszillierende Beschleunigung in x-Richtung, eine linear zunehmende Beschleunigung in y-Richtung sowie eine konstante Beschleunigung in z-Richtung. Berechne die Trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$ einer Masse m, welche sich unter dem Einfluss dieser Kraft bewegt. Die Startbedingungen zur Zeit $t = 0$ sind mit $\boldsymbol{v}_0$ und $\boldsymbol{r}_0$ gegeben.