MARTIN PFLAUMER: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 5

vom 19.11.21, Abgabe am 26.11.21, Besprechung in der Woche vom 29.11.21

Aufgabe 1 [*Taylornäherung*] (2+2=4 Pkt.)

(a) Berechne die Taylor-Näherung der folgenden Funktionen bis zur dritten Ordnung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$2x,\ \sin(x),\ \cos(x),\ \tan(x),\ \sinh(x),\ \cosh(x),\ \tanh(x),\ (1+x)^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(b) Betrachte eine Kreisbewegung in der x-y-Ebene,

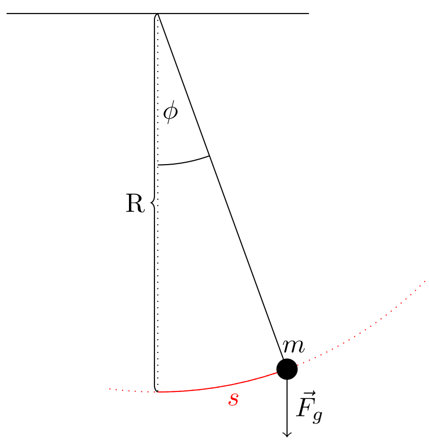
$$\boldsymbol{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)) \ ,$$

mit positivem R und ω. Entwickle $\boldsymbol{r}(t)$ in einem Taylorpolynom für kleine Zeiten t bis mindestens Ordnung 5. Skizziere, wie die Näherung die tatsächliche Trajektorie immer besser annähert, je mehr Terme hinzugefügt werden.
Hinweis: Benutze z.B. das frei verfügbare Programm `gnuplot`*, um saubere und aussagekräftige Skizzen anzufertigen.*

Aufgabe 2 [*Fadenpendel*] (2+2+1=5 Pkt.)

Betrachte einen an einem Faden der Länge R aufgehängten Massenpunkt (Masse m), der in einer Ebene unter Einfluss der Schwerkraft ($|\boldsymbol{F}_g| = mg$) pendelt.

(a) Stelle die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Auslenkung $s(t) = R\phi(t)$ auf (siehe Skizze). Drücke diese durch den Auslenkwinkel ϕ aus. Um die Bewegungsgleichung analytisch lösen zu können, führe eine Taylor-Näherung der rücktreibenden Kraft für kleine Winkel ϕ in führender nichtverschwindender Ordnung aus.



(b) Löse die genäherte Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $\phi(t=0) = 0$ und $\dot{\phi}(t=0) = \Omega$. Mit welcher Frequenz pendelt der Massenpunkt?

(c) Plotte $\frac{x}{\sin(x)}$ im Bereich $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Ab welchem Auslenkwinkel ϕ_c überschreitet die Differenz zwischen rücktreibender Kraft und ihrer Näherung 10%? (Bestimme ϕ_c näherungsweise graphisch aus dem Plot.)

Aufgabe 3 [*Schiefer Wurf mit Stokescher Reibung*] `(1+2+1+2+1=7 Pkt.)`

Wir betrachten wie in Aufgabe 2 von Blatt 3 den schiefen Wurf eines Massenpunktes in der x-z-Ebene mit Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ und Abwurfwinkel θ. Zusätzlich zur Gravitationskraft $\boldsymbol{F}_g = -mg\boldsymbol{e}_z$ soll nun außerdem Luftreibung wirken, die durch die Stokesche Reibung $\boldsymbol{F}_R = -\beta\boldsymbol{v}$ beschrieben wird. Der Anfangsort des Massenpunktes ist gegeben durch $\boldsymbol{r}(t=0) = 0$.

(a) Bestimme die Differentialgleichungen für die Komponenten des Ortsvektors $x(t)$ und $z(t)$.

(b) Bestimme die allgemeinen Lösungen der homogenen Differentialgleichungen für $x_{\text{hom}}(t)$ und $z_{\text{hom}}(t)$.

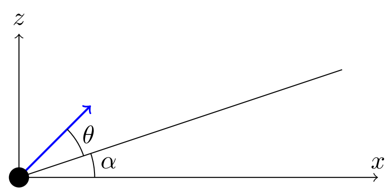
(c) Löse die inhomogene Differentialgleichung, um eine spezielle Lösung $z_p(t)$ zu finden.

(d) Benutze die Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit, um die Integrationskonstanten in $x(t)$ und $z(t)$ zu bestimmen.

(e) Betrachte den Grenzfall $t \to \infty$. Zeige, dass die horizontale Komponente der Geschwindigkeit verschwindet und der Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit vertikal fällt.

Aufgabe 4 [*Schiefer Wurf auf schiefe Ebene*] `(4 Pkt.)`

Ein Massenpunkt wird vom Fuß einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α auf eben diese geworfen (siehe Skizze). Wie muss der Wurfwinkel θ relativ zur schiefen Ebene gewählt werden, damit die Flugweite des Massenpunktes auf der schiefen Ebene maximal wird? Die Anfangsgeschwindigkeit ist $\boldsymbol{v}_0$.



Hinweis: Berechne zunächst die Flugzeit t_f. Hierbei ist die Relation $\sin(\phi_1 - \phi_2) = \sin(\phi_1)\cos(\phi_2) - \cos(\phi_1)\sin(\phi_2)$ *nützlich. Bestimme danach die Flugweite und maximiere diese. Benutze dazu die Relation* $2\cos(\phi_1)\sin(\phi_2) = \sin(\phi_1 + \phi_2) - \sin(\phi_1 - \phi_2)$.