Theoretische Physik 1 - Mathematische Methoden

Wintersemester 2021/2022 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 6

vom 26.11.21, Abgabe am 03.12.21, Besprechung in der Woche vom 06.12.21

Aufgabe 1 [*Komplexe Zahlen*] (1+1+1+1+1+1=6 Pkt.)

(a) Berechne für die folgenden Ausrücke jeweils den Realteil und den Imaginärteil:
$(-\mathrm{i})^3,\ \mathrm{i}^{44415},\ \sqrt{4(-25)},\ \log(1+\mathrm{i}),\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$.

(b) Zeichne die folgenden Punkte sowie deren komplex Konjugiertes in die komplexe Zahlenebene ein:
$z_1 = -1 - \mathrm{i},\ z_2 = -3 + \frac{1}{2}\mathrm{i},\ z_3 = 3 + 2\mathrm{i},\ z_4 = \frac{3}{2}\mathrm{i},\ z_5 = 1,\ z_6 = e^{3\pi\mathrm{i}}$.

(c) Konstruiere die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahlen:
$z_1 = \mathrm{i} - 1,\ z_2 = -(1+\mathrm{i}),\ z_3 = \mathrm{e}^{3+2\mathrm{i}},\ z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2},\ z_5 = -\mathrm{i}$.

(d) Berechne die folgenden Produkte. Führe die Rechnung für die ersten beiden Beispiele sowohl in der Polardarstellung, als auch in der kartesischen Darstellung aus und vergleiche die Ergebnisse aus den beiden Darstellungen. Berechne das dritte Beispiel in einer Darstellung deiner Wahl.

- $(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$
- $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$
- $(1+\mathrm{i})^{13}(1-\mathrm{i})^7$.

(e) Bestimme Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:
$z_1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\pi\mathrm{i}}, z_2 = \mathrm{e}^{-1-\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}, z_3 = \mathrm{e}^{3-\mathrm{i}}$.

(f) Bestimme die Länge der Vektoren $\boldsymbol{x}_1 = (1,2)$ und $\boldsymbol{x}_2 = (-3,4)$ in der x-y-Ebene sowie den Betrag der komplexen Zahlen $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ und $z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$. Addiere sowohl die beiden komplexen Zahlen, als auch die beiden Vektoren.

Aufgabe 2 [*Taylor-Näherung II*] (1+1+2=4 Pkt.)

Entwickle die folgenden Funktionen in einer Taylor-Näherung um $x_0 = 0$ bis zur zweiten Ordnung in x. A sei eine Konstante.

(a) $f_1(x) = \left(\mathrm{e}^{-Ax} - 1\right)^2$

(b) $f_2(x) = \left(\mathrm{e}^{-Ax^2} - 1\right)^2$

(c) $f_3(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-Ax}}{\cos^2(x)}\right)$

Hinweis: Nähere die komplizierten Funktionen durch "Ineinandereinsetzen" der elementaren Funktionen an. Hierfür ist es zweckmäßig, die Näherungen der folgenden Funktionen bis zur zweiten Ordnung auswendig zu kennen:
$e^{-Ax}, \ln(1+x), \cos(x), \frac{1}{1-x}$. *Berechne diese gegebenenfalls.*

Aufgabe 3 [*Harmonischer Oszillator in 2 Dimensionen*] (2+2+1=5 Pkt.)

Betrachte einen zweidimensionalen ungedämpften harmonischen Oszillator. Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \omega_x^2 x \\ \omega_y^2 y \end{pmatrix} = 0.$$

(a) Löse die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} x(t=0) \\ y(t=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t=0) \\ \dot{y}(t=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und zeichne die Trajektorie in der x-y-Ebene für sowohl $\omega_x = \omega_y$ als auch für $\omega_x = 2\omega_y$.

(b) Welche Anfangsbedingungen führen im Fall $\omega_x = \omega_y$ zu einer kreisförmigen Trajektorie mit dem Radius R?

(c) Gib die notwendige Einschränkung an ω_x und ω_y an, die sicherstellt, dass die Trajektorie eine geschlossene Bahn bildet, d.h. dass sie sich nach endlicher Zeit exakt wiederholt.

Aufgabe 4 [*Gedämpfter harmonischer Oszillator*] (3+2=5 Pkt.)

Betrachte einen gedämpften harmonischen Oszillator mit der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\ ,$$

wie aus der Vorlesung bekannt.

(a) Gib die Trajektorie für die Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = v_0$ an. Unterscheide dabei die drei Fälle:

  (i) $\alpha > \omega_0$
  (ii) $\alpha < \omega_0$
  (iii) $\alpha = \omega_0$.

(b) Unter welchen Bedingungen tritt in den Fällen (ii) und (iii) ein Nulldurchgang auf?
Hinweis: Berechne hierzu den Zeitpunkt des Nulldurchgangs und prüfe, wann dieser Zeitpunkt positiv und reell ist.