Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 7

vom 03.12.21, Abgabe am 10.12.21, Besprechung in der Woche vom 13.12.21

Aufgabe 1 [*Gedämpfter harmonischer Oszillator II*] (4+2=6 Pkt.)

Gegeben sei ein gedämpfter harmonischer Oszillator unter dem Einfluss einer äußeren anregenden Kraft beschrieben durch die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = F/m \; .$$

(a) Die äußere anregende Kraft sei $F = f_0 m \cos(\Omega_0 t)$. Berechne die Trajektorie für den Fall, dass der harmonische Oszillator zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei $x_0 = 0$ in Ruhe sei. Gehe dabei von schwacher Dämpfung $\alpha < \omega_0$ aus. Zeichne die resultierende Trajektorie (idealerweise mit dem Computer z.B. mit `gnuplot`) für die Parameter $\alpha = \sqrt{2/3}\,\frac{1}{s}$, $\omega_0 = 1\,\frac{1}{s}$, $f_0 = 1/\sqrt{3}\,\frac{m}{s^2}$, $\Omega_0 = \sqrt{3}\,\frac{1}{s}$.
Hinweis: Benutze ggf. $\sin(\operatorname{arccot}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *und* $\cos(\operatorname{arccot}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(b) Betrachte nun den Fall $F = f_0 m \cos(\Omega_0 t) + f_1 m \cos(\Omega_1 t)$ mit denselben Anfangsbedingungen. Zeichne die resultierende Trajektorie für die Parameter $\alpha = \sqrt{2/3}\,\frac{1}{s}$, $\omega_0 = 1\,\frac{1}{s}$, $f_0 = f_1 = \sqrt{3}\,\frac{m}{s^2}$, $\Omega_0 = \sqrt{3}\,\frac{1}{s} = 2\Omega_1$.

Aufgabe 2 [*Gedämpfter harmonischer Oszillator III*] (4 Pkt.)

Betrachte wieder einen gedämpften harmonischen Oszillator in einer Dimension mit der Reibungskraft $-2m\alpha\dot{x}$. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sei der Oszillator in Ruhe bei $x_0 = 0$. Im Zeitintervall $[0, T]$ wirkt die konstante Kraft $F = f_0\, m$. Für $t > T$ sei $F = 0$. Bestimme die Trajektorie für beide Zeitbereiche.

Aufgabe 3 [*Trigonometrische Funktionen*] (2+1+1+1=5 Pkt.)

(a) Zeige, dass die drei Ansätze

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t), \\ x_2(t) &= C\sin(\omega_0 t + \phi_1), \\ x_3(t) &= D\cos(\omega_0 t + \phi_2) \end{aligned}$$

Lösungen der Bewegungsgleichung $m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = 0$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators sind. Zeige außerdem, dass die drei Ansätze äquivalent sind, d.h. bestimme die Beziehungen zwischen $(A, B), (C, \phi_1)$ und (D, ϕ_2), die die Ansätze ineinander überführen.

(b) Zeige, dass die Parameter A, B und α in dem Ausdruck

$$A\cos(x) + B\sin(x+\alpha)$$

nicht unabhängig sind, indem Du eine spezielle Veränderung eines Parameters durch entsprechende Veränderung der anderen beiden angibst.

(c) Zeige, dass $\cos(x)$ und $\sin(x)$ linear unabhängige Funktionen sind, indem Du z.B. die Gleichung

$$\cos(x) = A\sin(x)$$

für $x \in \{\pi/3, \pi/4\}$ aufstellst und zeigst, dass kein A existiert, sodass die Gleichung für beide x erfüllt ist.

(d) Zeige, dass $\cosh(x), \exp(x)$ und $\exp(-x)$ linear abhängig sind.

Aufgabe 4 [*Harmonischer Oszillator*] `(1+3+1=5 Pkt.)`

Betrachte im Folgenden einen harmonischen Oszillator in einer Dimension.

(a) Zeige, dass für diesen der Energieerhaltungssatz gilt, d.h. dass $\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(T+V) = 0$. Hierbei bezeichnen T und V die kinetische Energie und die potentielle Energie.

(b) Berechne, ausgehend vom Energieerhaltungssatz, die Trajektorie $x(t)$ für den Fall, dass der Oszillator zur Zeit t_0 seine (positive) Maximalauslenkung erreicht.

(c) Das in (b) berechnete $x(t)$ hängt dann von der Gesamtenergie E und t_0 ab. Wie ändert sich die Lösung, wenn man sie anstatt von t_0 in Abhängigkeit von t_1 schreibt, wobei t_1 die Zeit ist, bei der der Oszillator seine (positive) Maximalgeschwindigkeit erreicht hat?