Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 9

vom 17.12.21, Abgabe am 14.01.22, Besprechung in der Woche vom 17.01.22

Aufgabe 1 [*Volumen- und Wegintegrale*] (1+2+3=6 Pkt.)

(a) Berechne das Integral $\int_0^a dx \int_0^b dy$. Diskutiere, von welcher geometrischen Form dieses Integral dem Flächeninhalt entspricht. Berechne anschließend ds Integral $\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi$. Erhält man dadurch die Fläche eines Kreises mit Radius R? Überlege geometrisch, wie der zweite Integrand verändert werden muss, damit man die Kreisfläche erhält? Diskutiere das zugrundeliegende Problem geometrisch.

(b) Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer Spiralbahn gemäß

$$\boldsymbol{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), bt),$$

die Bewegung ist also durch die Zeit t parametrisiert, R, ω und b sind konstant. Berechne für den Fall $b = 0$ den in der Zeit von 0 bis T zurückgelegten Weg s, indem Du ein entsprechendes Wegintegral aufstellst und löst. Wie ändert sich das Ergebnis für $b \neq 0$?

(c) Die Trajektorie eines schiefen Wurfes ist gegeben durch

$$\boldsymbol{r}(t) = (v_0 t\cos(\alpha), v_0 t\sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2, 0),$$

wobei $0 < \alpha < \pi/2$.
Bestimme analog zu (b) die vom geworfenen Gegenstand zurückgelegte Strecke s. Der Wurf beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ und Höhe $y = 0$. Er endet, wenn der Gegenstand erneut bei $y = 0$ am Boden aufschlägt. Wie viel größer ist s für den weitesten Wurf ($\alpha = 45°$) im Vergleich zur in x-Richtung gemessenen Wurfweite?
Hinweis: Benutze $\int_a^b \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+A} + A\ln\big(\sqrt{x^2+A}+x\big)\big)\big|_a^b$ *mit* $A > 0$.

Aufgabe 2 [*Richtungsableitung*] (2 Pkt.)

Betrachte eine Funktion $f(x,y)$. Zeige, dass die Richtungsableitung von f maximal wird, wenn die Richtung $\hat{\boldsymbol{n}}$ parallel zum Gradienten, minimal wenn $\hat{\boldsymbol{n}}$ antiparallel zum Gradienten und Null wenn $\hat{\boldsymbol{n}}$ senkrecht zum Gradienten steht. Welche Werte nimmt die Richtungsableitung jeweils an?
Hinweis: Parametrisiere $\hat{\boldsymbol{n}}$ *als* $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ *und bestimme die Extrema der Richtungsableitung bezüglich des Winkels* φ.

Aufgabe 3 [*Vektoranalsis II*] (1+1+1+1+1+1=6 Pkt.)

Gegeben ist ein Skalarfeld $\phi(\boldsymbol{r})$, ein Vektorfeld $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ sowie die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{d}$. Beweise die folgenden Relationen. Benutze hierfür ggf. den ϵ-Tensor sowie die auf Blatt 1 gezeigten Identitäten.

(a) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot [(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})] = [\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})]^2$

(b) $\mathrm{div}(\phi \boldsymbol{A}) = \phi\, \mathrm{div}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} \cdot (\mathrm{grad}(\phi))$

(c) $\mathrm{rot}(\phi \boldsymbol{A}) = \phi\, \mathrm{rot}(\boldsymbol{A}) + (\mathrm{grad}(\phi)) \times \boldsymbol{A}$

(d) Berechne $\mathrm{div}(\boldsymbol{r})$ und $\mathrm{div}(\boldsymbol{e}_r/r^2)$.

(e) Was ergibt der Ausdruck $\mathrm{rot}((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})/2)$, wobei $\boldsymbol{a}$ konstant und $\boldsymbol{r}$ der Ortsvektor ist?

(f) Zeige, dass $\mathrm{rot}(\phi(r)\boldsymbol{r}) = 0$ gilt, wobei $r = |\boldsymbol{r}|$

Aufgabe 4 [*Masse der Einheitskugel*] (2+2+2=6 Pkt.)

Eine Einheitskugel beschreibt eine Kugel mit Radius $R = 1$, d.h. das darin eingeschlossene Volumen V ist definiert durch

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Die Gesamtmasse, die innerhalb der Einheitskugel eingeschlossen ist, kann über das Volumenintegral

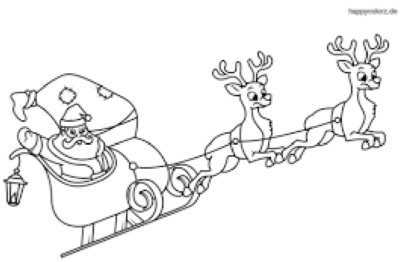
$$m = \int \int \int_V dx\, dy\, dz\, \rho(x, y, z)$$

bestimmt werden, wobei $\rho(x, y, z)$ die sog. Massendichte ist. Berechne die Gesamtmasse für

(a) $\rho(x, y, z) = 1$,

(b) $\rho(x, y, z) = |z|$,

(c) $\rho(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$.



htt-
ps://www.pinterest.de/pin/703265298047350880/
bzw. happycolorz.de

Wir wünschen Euch Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!