

THEORETISCHE PHYSIK 1 - MATHEMATISCHE METHODEN

WINTERSEMESTER 2021/2022 – PROF. MARC WAGNER

MARTIN PFLAUMER: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 10

vom 14.01.22, Abgabe am 21.01.22, Besprechung in der Woche vom 24.01.22

Aufgabe 1 [Differentialgleichungen] (1+2+2=5 Pkt.)

- (a) Löse die Differentialgleichung $\ddot{z} + 4z = 0$ mit den Randbedingungen $z(0) = 0$, $z(\pi/4) = 1$ bzw. $z(\pi/2) = -1$, $\dot{z}(\pi/2) = 1$.
- (b) Errate gezielt jeweils eine spezielle Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen:
- (i) $\ddot{y} + \dot{y} + y = 2t + 3$,
- (ii) $4\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = -2t + 5$.

Hinweis: Mache einen linearen Ansatz für die spezielle Lösung.

- (c) Bestimme die vollständige Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen:
- (i) $7\ddot{x} - 4\dot{x} - 3x = 6$,
- (ii) $\ddot{z} - 10\dot{z} + 9z = 9t$.

Aufgabe 2 [Potentiale II] (5 Pkt.)

Betrachte im Folgenden die Kräfte

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) &= -mg\mathbf{e}_z && \text{(Schwerefeld der Erde),} \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) &= -m\omega_0^2\mathbf{r} && \text{(isotroper harmonischer Oszillator),} \\ \mathbf{F}_3(\mathbf{r}) &= (ay, ax, b) && (a, b \text{ konstant}).\end{aligned}$$

Untersuche, ob die Kräfte konservativ sind. Bestimme, falls möglich, das jeweilige Potential $V(\mathbf{r})$.

Auch wenn die Potentiale leicht zu “erraten” sind, verwende für deren Bestimmung eine der beiden in der Vorlesung angegebenen formalen Methoden, bestimme $V(\mathbf{r})$ also entweder über das System von Gleichungen $\mathbf{F} = -\nabla V$ oder über das Wegintegral der Arbeit. Beim Wegintegral ist es zur einfachen Vergleichbarkeit der Ergebnisse in den Übungen zweckmäßig, von $\mathbf{0}$ bis \mathbf{r} zu integrieren.

Aufgabe 3 [Schneepflug] (4 Pkt.)

Eine Bergstraße ist mit einer Schneeschicht der Höhe $h = h_0 = \text{const.}$ bedeckt. Ein Schneepflug der Breite b fährt diese Straße hinunter, was durch die Trajektorie

$$\mathbf{r}(t) = \left(\alpha t, \frac{2\beta}{3}t^{3/2}, H - \alpha t\right)$$

beschrieben wird. Hierbei ist H die Höhe des Berges und α und β sind positive Konstanten. Für β gilt außerdem $\beta^2 = \alpha^3/H$. Das Fahrzeug fährt zum Zeitpunkt $t = 0$ los. Zu welchem Zeitpunkt T kommt es am Fuße des Berges an (dieser befindet sich bei $z = 0$)? Wie viel Schnee hat die Maschine zu diesem Zeitpunkt bereits geräumt? Wie verändert sich diese Menge wenn die Höhe der Schneeschicht von z abhängt, $h = h(z) = \frac{h_0}{H}z$?

Hinweis: Nimm an, dass die Maschine nicht breiter als die Straße ist und der Schnee die Maschine nicht überragt. Es gilt: $\int dx \sqrt{A+Bx}(C-Dx) = \frac{2}{15B^2}(A+Bx)^{3/2}(5BC+2AD-3BDx) + \text{const.}$, mit A, B, C, D konstant und positiv.

Aufgabe 4 [Arbeit II]

(6 Pkt.)

Ein Teilchen bewegt sich auf vier unterschiedlichen Wegen von Punkt A zu Punkt B , siehe Abbildung 1. Punkt A liege bei $(-a, 0)$, Punkt B bei $(a, 0)$, Punkt C bei $(-a/2, 2a)$ und Punkt D bei $(a/2, -2a)$. Bei Weg C_2 und C_3 handelt es sich um eine halbe Kosinus- bzw. eine ganze Sinusschwingung. Parametrisiere die Wege auf geeignete Weise. Berechne die verrichtete Arbeit für jeden der vier Wege für das Kraftfeld

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = (-mg, -m\omega_0^2 y, 0).$$

Berechne außerdem die auf den Wegen C_1 und C_2 verrichtete Arbeit für

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}.$$

Hierbei ist α konstant. Teste, ob die Kraftfelder konservativ sind und verwende diese Resultate zur Interpretation deiner Ergebnisse.

Hinweis: Eine mögliche Parametrisierung des Weges C_2 ist $(\lambda, a \cos(\frac{\pi\lambda}{2a}))$ mit $\lambda \in [-a, a]$. Weiterhin gilt $\int_{-A}^A \cos(x) \sin(x) dx = 0$ und $\int \sin(x) x dx = -x \cos(x) + \sin(x) + \text{const.}$

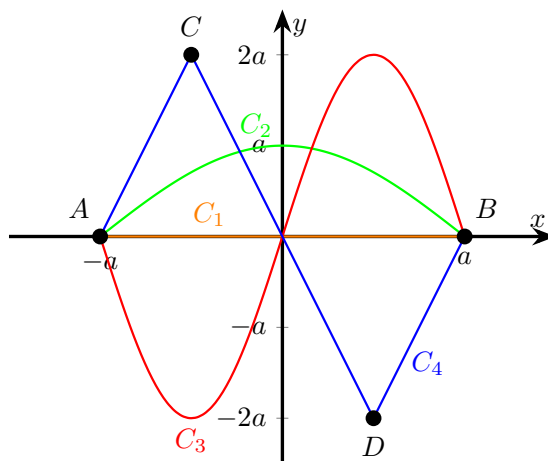


Abbildung 1: Verschiedene Wege von A nach B .