Theoretische Physik 1 - Mathematische Methoden

Wintersemester 2021/2022 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 11

vom 21.01.22, Abgabe am 28.01.22, Besprechung in der Woche vom 31.01.22

Aufgabe 1 [*N-Teilchensystem*] (2+2+4=8 Pkt.)

Betrachte ein Vielteilchensystem bestehend aus N Teilchen.

(a) Der Gesamtdrehimpuls des Systems ist gegeben durch die Summe der jeweiligen Drehimpulse aller Teilchen,

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{l}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i,$$

wobei m_i und $\boldsymbol{r}_i$ Masse und Ortsvektor des i-ten Teilchens sind.
Der Gesamtdrehimpuls kann zu $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_s + \boldsymbol{L}_r$ vereinfacht werden, wobei $\boldsymbol{L}_s$ nur von der Schwerpunktskoordinate $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{L}_r$ nur von den Relativkoordinaten $\bar{\boldsymbol{r}}_i$ bezüglich des Schwerpunktes anhängt (siehe Abbildung 1). Bestimme die Ausdrücke für $\boldsymbol{L}_s$ und $\boldsymbol{L}_r$, indem du $\boldsymbol{r}_i$ durch $\boldsymbol{R}$ und $\bar{\boldsymbol{r}}_i$ ausdrückst.

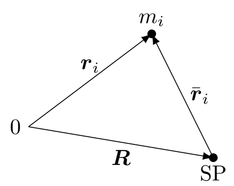

Abbildung 1: Grafische Darstellung der Vektoren $\boldsymbol{r}_i$, $\bar{\boldsymbol{r}}_i$ und $\boldsymbol{R}$. 0 bezeichnet den Ursprung des Koordinatensystems und SP den Schwerpunkt des Teilchensystems.

(b) Analog zum Gesamtdrehimpuls kann auch die kinetische Energie T in die kinetische Energie des Schwerpunkts T_s und die relative kinetische Energie T_r aufgeteilt werden,

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 = T_s + T_r.$$

Bestimme die Ausdrücke für T_s und T_r.

(c) Betrachte nun ein System, das aus 3 Teilchen der gleichen Masse m besteht, die zum Zeitpunkt t_0 die folgenden Orts- und Geschwindigkeitsvektoren besitzen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= (1,1,0)\, r_0, & \boldsymbol{v}_1 &= (2,0,0)\, v_0, \\ \boldsymbol{r}_2 &= (0,1,1)\, r_0, & \boldsymbol{v}_2 &= (0,1,0)\, v_0, \\ \boldsymbol{r}_3 &= (0,0,1)\, r_0, & \boldsymbol{v}_3 &= (1,1,1)\, v_0. \end{aligned}$$

Hierbei ist r_0 eine konstante Länge und v_0 eine konstante Geschwindigkeit. Bestimme den Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{L}$ und die kinetische Energie T zum Zeitpunkt t_0, indem du die Schwerpunkts- und Relativanteile $\boldsymbol{L}_s$ und $\boldsymbol{L}_r$ bzw. T_s und T_r berechnest.

Aufgabe 2 [*Zweikörperproblem*] (3+4+3+2=12 Pkt.)

Betrachte zwei Massenpunkte m_1 und m_2, welche durch eine Feder verbunden sind und aufeinander die Kräfte $\boldsymbol{F}_{2\to 1} = -\boldsymbol{F}_{1\to 2} = -k(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ ausüben. k ist eine positive Konstante. Es wirken keine äußeren Kräfte.

(a) Formuliere das Problem in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten und löse die entsprechenden Bewegungsgleichungen für $\boldsymbol{R}(t)$ und $\boldsymbol{r}(t)$. Bestimme die allgemeine Form der Trajektorien $\boldsymbol{r}_1(t)$ und $\boldsymbol{r}_2(t)$ der beiden Massenpunkte. Skizziere die Trajektorien.

(b) Löse das Anfangswertproblem für die folgenden Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1(0) &= (l,0,0), & \dot{\boldsymbol{r}}_1(0) &= v_0 \frac{m_1}{M}(-1,1,0), \\ \boldsymbol{r}_2(0) &= (0,l,0), & \dot{\boldsymbol{r}}_2(0) &= v_0 \frac{m_2}{M}(1,-1,0). \end{aligned}$$

Hierbei sind l und v_0 positive Konstanten und M ist die Gesamtmasse des Systems.

(c) Bestimme den Gesamtimpuls $\boldsymbol{P}$, die Gesamtenergie E und den Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{L}$ des Systems. Sind diese Größen erhalten?

(d) Betrachte die Spezialfälle $m_1 = m_2 \equiv m$ und $m_1 = 2m_2 \equiv 2m$ und diskutiere die qualitativen Unterschiede bezogen auf den Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{L}$ und die Bewegung des Schwerpunktes $\boldsymbol{R}(t)$.