THEORETISCHE PHYSIK 1 - MATHEMATISCHE METHODEN
WINTERSEMESTER 2021/2022 – PROF. MARC WAGNER

MARTIN PFLAUMER: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 12

vom 28.01.22, Abgabe am 04.02.22, Besprechung in der Woche vom 07.02.22

Aufgabe 1 [*Krummlinige Koordinatensysteme I*] (2+2+2+4=10 Pkt.)

Alternativ zu den bekannten kartesischen Koordinaten $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ lassen sich auch andere Koordinatensysteme wählen. Für diese sogenannten krummlinigen Koordinaten definiert man Basisvektoren über

$$\boldsymbol{e}_{\xi_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_j} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_j} \right|^{-1},$$

wobei ξ_j die jeweilige Koordinate angibt. Eine weitere wichtige Größe ist die sogenannte Jacobi-Matrix

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial \xi_j}$$

mit den partiellen Ableitungen der Komponenten des Ortsvektors in kartesischen Koordinaten nach den krummlinigen Koordinaten als Einträgen. Diese wird bei der Berechnung von Integralen in krummlinigen Koordinatensystemen im späteren Verlauf des Semesters wichtig werden.
Löse die folgenden Aufgaben jeweils für Zylinder- und Kugelkoordinaten, welche neben den Polarkoordinaten bereits in der Vorlesung eingeführt wurden. Für Zylinderkoordinaten gilt

$$\boldsymbol{r}(R, \varphi, z) = (R\cos(\varphi), R\sin(\varphi), z) \quad \text{und} \quad \xi_j \in \{R, \varphi, z\}$$

und für Kugelkoordinaten

$$\boldsymbol{r}(R, \theta, \varphi) = (R\cos(\varphi)\sin(\theta), R\sin(\varphi)\sin(\theta), R\cos(\theta)) \quad \text{und} \quad \xi_j \in \{R, \theta, \varphi\}$$

(a) Bestimme die Jacobi-Matrix.

(b) Bestimme die Basisvektoren sowie deren Zeitableitung im Fall von zeitabhängigen ξ_j. Wie hängen diese mit der Jacobi-Matrix zusammen?

(c) Drücke Ort und Geschwindigkeit durch die krummlinigen Koordinaten und deren Basisvektoren aus.

(d) Drücke die kinetische Energie und den Drehimpuls durch die krummlinigen Koordinaten und deren Basisvektoren aus.

Hinweis: Überzeuge dich, dass für die hier verwendeten Basisvektoren $\boldsymbol{e}_{\xi_i}$ gilt $\boldsymbol{e}_{\xi_i} \cdot \boldsymbol{e}_{\xi_j} = \delta_{ij}$ und $\boldsymbol{e}_{\xi_i} \times \boldsymbol{e}_{\xi_j} = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_{\xi_k}$.

Aufgabe 2 [*Krummlinige Koordinatensysteme II*] (2+2+2=6 Pkt.)

Es kann von Vorteil sein, Bewegungsgleichungen in einem speziellen krummlinigen Koordinatensystem zu lösen, wenn die Gleichungen darin besonders einfach sind. Umgekehrt kann eine ungeschickte Koordinatenwahl die Mathematik stark verkomplizieren.

(a) Betrachte zunächst eine kräftefreie Bewegung, beschrieben durch die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = 0,$$

welche im Ursprung bei $t = 0$ mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ startet, und bestimme die Lösung wie gewohnt in kartesischen Koordinaten. Formuliere diese Gleichung nun in Zylinderkoordinaten, indem du $\ddot{\boldsymbol{r}}$ entsprechend bestimmst. Transformiere die kartesische Lösung der Gleichung ebenfalls in Zylinderkoordinaten und verifiziere, dass diese die Bewegungsgleichung in Zylinderkoordinaten erfüllt. Was fällt dir auf?

(b) Betrachte nun eine Kreisbewegung eines Massenpunktes mit Masse m in der x-y-Ebene:

$$\boldsymbol{r}(t) = (R_0 \cos(\omega t), R_0 \sin(\omega t), 0),$$

mit R_0, ω konstant und positiv. Bestimme die auf den Massenpunkt wirkende Kraft sowohl in kartesischen als auch in Zylinderkoordinaten.
Hinweis: Bestimme zunächst die bekannte Bewegungsgleichung in kartesischen Koordinaten und leite daraus die Kraft ab. Transformiere diese dann in Zylinderkoordinaten.

(c) Löse folgende Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten:

$$\dot{R} = 0, \qquad \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = \omega^2 \frac{\pi}{2}, \qquad \ddot{\varphi} = 0.$$

Die Anfangsbedingungen sind durch

$$R(0) = R_0, \quad \theta(0) = \frac{11}{20}\pi, \quad \dot{\theta}(0) = \omega \frac{\pi}{20}, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \varphi_1$$

gegeben, wobei ω, R_0, φ_0, φ_1 positive Konstanten sind. Um welche Bewegung handelt es sich? Betrachte anschließend den Fall $\omega = 0$ und transformiere deine Lösung in kartesische Koordinaten. Welche Bewegung wird jetzt beschrieben?
Hinweis: Beachte, dass $\theta \in [0, \pi]$ gilt.

Aufgabe 3 [*Kosmische Geschwindigkeiten*] (2+2=4 Pkt.)

(a) Betrachte einen Satelliten der Masse m_S. Welche Geschwindigkeit v_1 muss er mindestens haben, damit er in einer Kreisbahn um die Erde schwebt? Vernachlässige Luftreibung. Berechne zusätzlich den ungefähren numerischen Wert von v_1 für $G = 6,674 \times 10^{-11}\,\mathrm{kg\,m^3/s^2}$ (Graviationskonstante), $M = 5,974 \times 1024\,\mathrm{kg}$ (Masse der Erde) und $R_E = 6371\,\mathrm{km}$ (Erdradius).

(b) Auf welche Geschwindigkeit v_2 muss ein auf der Erdoberfläche gestarteter Satellit gebracht werden, um den Schwerebereich der Erde komplett zu verlassen? Berechne den numerischen Wert von v_2 für G, M und R_E aus (a).