Theoretische Physik 1 - Mathematische Methoden

Wintersemester 2021/2022 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 13

vom 04.02.22, Abgabe am 11.02.22, Besprechung in der Woche vom 14.02.22

Aufgabe 1 [*Bonusaufgabe: Kepler-Problem I*] (1+1+2+1+2=7 Pkt.)

Punkte auf einer Ellipse sind durch die Beziehung

$$r_1 + r_2 = const = 2a$$

definiert, wobei r_1 und r_2 die Abstände der beiden Brennpunkte zu dem jeweiligen Punkt auf der Ellipse sind. a wird als große Halbachse bezeichnet. Die Brennpunkte liegen auf der durch die große Halbachse definierten x-Achse bei $(c, 0)$ und $(-c, 0)$. Es gilt $a > c$. Eine weitere wichtige Größe ist die kleine Halbachse b mit $b > 0$, welche den Schnittpunkt der Ellipse mit der y-Achse beschreibt. Im Rahmen des Kepler-Problems liegt im Folgenden die Sonne, um den sich der Planet bewegt, im ersten Brennpunkt. Dann bezeichnet $r_1 \equiv r$ den Abstand zwischen den beiden Himmelskörpern, r_2 wird mit R bezeichnet. Wichtig für das Kepler-Problem ist außerdem der Winkel φ zwischen dem Vektor, der von der Sonne zum Planeten zeigt, und der x-Achse. Mit der oben getroffenen Festlegung liegt der Perihel bei $\varphi = 0$.

(a) Skizziere das beschriebene Problem.

(b) Drücke die kleine Halbachse b durch a und c aus.

(c) Zeige, dass die in der Vorlesung für das Kepler-Problems hergeleitete Bahnkurve

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \tag{1}$$

eine Ellipse mit

$$k = \frac{a^2 - c^2}{a}, \quad \epsilon = \frac{c}{a}$$

beschreibt.

Im Gegensatz zu einer Ellipse beschreibt eine Hyperbel keine geschlossene Bahnkurve, sondern die Trajektorie eines aus dem Unendlichen kommenden Objekts, das bei $\varphi = 0$ die Sonne passiert und wiederum ins Unendliche verschwindet. Genauer gilt für Punkte auf der Hyperbel

$$R - r = const = 2a. \tag{2}$$

Hierbei gilt nun $a < c$. Es lässt sich jedoch analog zur Ellipse eine Gleichung der Form (1) angeben.

(d) Skizziere die Situation für die Hyperbel-Trajektorie. Achte darauf, dass sich, im Vergleich zur Ellipse, die Sonne nun im zweiten Brennpunkt befindet.

(e) Bestimme die Parameter k und ϵ aus Gleichung (1) als Funktion von a und c für die Hyperbel.

Aufgabe 2 [*Bonusaufgabe: Kepler-Problem II*] `(2 Pkt.)`

In der Vorlesung wurde die Bahnkurve der Relativkoordinate beim Kepler-Problem hergeleitet, siehe Gl. (1). Bestimme die Beziehung zwischen den Parametern (k, ϵ) und (Drehimpuls l, Energie E) ausgehend von der in der Vorlesung gemachten Definition für k sowie der Gesamtenergie ausgewertet am Perihel. Gib sowohl $k(l, E)$, $\epsilon(l, E)$ als auch $l(k, \epsilon)$, $E(k, \epsilon)$ an.

Aufgabe 3 [*Bonusaufgabe: Kepler-Problem III*] `(7 Pkt.)`

Löse das Kepler-Problem für den Fall, dass nicht das Newtonsche Gravitationsgesetz mit $\boldsymbol{F} \sim \hat{\boldsymbol{r}}/r^2$ gilt, sondern das eine Kraft der Form $\boldsymbol{F} = -\delta/r^3\hat{\boldsymbol{r}}$ wirkt, mit δ konstant und positiv. Bestimme r als Funktion von φ. Wähle als Anfangsbedingungen der zu lösenden Differentialgleichung

$$r(0) = R_0, \qquad \dot{r}(0) = 0, \tag{3}$$

mit $R_0 > 0$. Unterscheide die zwei auftretenden qualitativ unerschiedlichen Fälle und skizziere jeweils die Lösung.

Aufgabe 4 [*Bonusaufgabe: Streuung im Gravitationsfeld*] `(4 Pkt.)`

Ein Asteroid der Masse m_A nähert sich der Erde aus dem Unendlichen kommend. Unter welchen Umständen wird er nicht auf einer Hyperbelbahn an der Erde vorbeifliegen, sondern diese treffen? Vernachlässige den Einfluss anderer Himmelskörper. Drücke dein Ergebnis, neben den üblichen Konstanten G, R und M (Masse der Erde), als Funktion des Stoßparameters b und der Geschwindigkeit des Asteroiden im Unendlichen v_∞ aus.
Hinweis: Benutze die in der Vorlesung diskutierten Zusammenhänge für $k(l)$ und $\epsilon(l, E)$, um Ausdrücke für a und c zu bestimmen. Drücke die Energie E und den Drehimpuls l anschließend durch den Stoßparameter b und die Geschwindigkeit des Asteroiden im Unendlichen v_∞ aus.