

# Theoretische Physik 1

## Mathematische Methoden

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main – Wintersemester 2021/22

Version: 14. Februar 2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Kinematik von Massenpunkten</b>	<b>6</b>
2.1	Grundlagen der Vektorrechnung . . . . .	6
2.2	Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .	10
2.2.1	Geschwindigkeit . . . . .	10
2.2.2	Beschleunigung . . . . .	11
2.2.3	Beispiel: Kreisbewegung . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Dynamik von Massenpunkten (Grundlagen)</b>	<b>13</b>
3.1	Newtonsche Axiome . . . . .	13
3.2	Typische in der Mechanik auftretende Kräfte . . . . .	14
3.3	Lösung der Newtonschen BGl für spezielle “einfache Kräfte” (1) . . . . .	15
3.3.1	Verschwindende Kraft $\mathbf{F} = 0$ . . . . .	16
3.3.2	Konstante Kraft $\mathbf{F} = \text{const}$ . . . . .	18
3.3.3	Zeitabhängige Kraft $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ (aber nicht ortsabhängig) . . . . .	20
3.3.4	Lineare Reibungskraft . . . . .	20
3.4	Einschub: Taylor-Näherung . . . . .	22
3.5	Lösung der Newtonschen BGl für spezielle “einfache Kräfte” (2) . . . . .	25
3.5.1	Konstante Kraft und lineare Reibungskraft . . . . .	25
3.6	DGLs: Zusammenfassung und Ergänzungen . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Harmonischer Oszillator (HO)</b>	<b>30</b>
4.1	Komplexe Zahlen . . . . .	30
4.1.1	Kartesische Darstellung . . . . .	30
4.1.2	Polardarstellung . . . . .	31
4.1.3	Beweis $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ . . . . .	31
4.2	Ungedämpfter HO . . . . .	32
4.3	Gedämpfter HO . . . . .	33
4.3.1	Starke Dämpfung ( $\alpha > \omega_0$ ) . . . . .	33
4.3.2	Schwache Dämpfung ( $\alpha < \omega_0$ ) . . . . .	34
4.3.3	Kritische Dämpfung ( $\alpha = \omega_0$ ) . . . . .	34
4.4	Angeregter gedämpfter HO . . . . .	35

<b>5</b>	<b>Kraftfelder, Potentiale, Energieerhaltung</b>	<b>39</b>
5.1	Rein ortsabhängige Kraft in 1 Dimension . . . . .	39
5.2	Grundlagen der Vektoranalysis . . . . .	42
5.2.1	Ableitungen skalarer Funktionen/Felder . . . . .	42
5.2.2	Ableitungen von vektoriellen Funktionen/Vektorfeldern . . . . .	46
5.2.3	Zweite Ableitungen von Feldern . . . . .	48
5.2.4	Integrale von Funktionen von mehreren Variablen . . . . .	49
5.3	Kraftfelder und Potentiale in 3 Dimensionen . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Vielteilchensysteme</b>	<b>56</b>
6.1	Erhaltung der Gesamtenergie . . . . .	56
6.2	Impuls und Drehimpuls eines Teilchens . . . . .	57
6.3	Erhaltung des Gesamtimpulses, Schwerpunktbewegung . . . . .	58
6.4	Erhaltung des Gesamtdrehimpulses . . . . .	59
6.5	Schwerpunkt- und Relativkoordinaten beim abgeschlossenen 2-Teilchensystem . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Krummlinige Koordinatensysteme</b>	<b>62</b>
7.1	Polarkoordinaten . . . . .	62
7.2	Zylinderkoordinaten . . . . .	63
7.3	Kugelkoordinaten . . . . .	64
<b>8</b>	<b>Kepler-Problem</b>	<b>65</b>
8.1	Planetenbewegung ( $\epsilon < 1$ ) . . . . .	68
8.2	Ablenkung/Streuung durch Gravitationsfeld ( $\epsilon > 1$ ) . . . . .	69
<b>9</b>	<b>Volumenintegrale in krummlinigen Koordinaten</b>	<b>73</b>
9.1	Volumenelement, Jacobi-Matrix, Jacobi-Determinante . . . . .	73
9.2	Gravitationspotential einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung . . . . .	75
<b>10</b>	<b>Starrer Körper (1. Teil, Grundlagen)</b>	<b>79</b>
10.1	Definition, charakteristische Größen . . . . .	79
10.2	Rotationsmatrizen . . . . .	80
10.3	Rotation um feste Achse . . . . .	81
10.3.1	Physikalisches Pendel . . . . .	83

10.3.2 Satz von Steiner . . . . .	85
10.4 Rollbewegung . . . . .	86

# 1 Vorbemerkungen

- Ziel der Physik: Vermessung, Beschreibung und Verständnis der Naturgesetze.
- Experimentelle Wissenschaft ... theoretische Aussagen nur sinnvoll, wenn
  - durch Experiment nachprüfbar bzw. mit existierenden Experimenten verträglich,
  - diese Vorhersagekraft besitzen, d.h. der Ausgang zukünftiger Experimente mit ihrer Hilfe vorhergesagt werden kann.
- Ziele der theoretischen Physik:
  - Mathematische Beschreibung der Naturgesetze.
  - Zurückführen scheinbar unterschiedlicher physikalischer Phänomene auf eine mathematische Formel/ein Grundprinzip  
→ Vereinheitlichung.
  - Beispiel: Newtonsche Bewegungsgleichung beschreibt geradlinige Bewegung eines “freien Teilchens”, Wurfparabel eines fliegenden Balls und ellipsenförmige Bewegung von Planeten um ihre Sonne.
  - Man will nicht 1000 Formeln für 1000 Phänomene ... dann hat man nichts gelernt. Man will eine (Welt-)Formel, die alles beschreibt.
- Theoretische Physik 1 bis 5:
  - 2× Mechanik.
  - Elektrodynamik.
  - Quantenmechanik.
  - Statistische Physik.
- Inhalt von “Theoretische Physik 1– Mathematische Methoden”:
  - Mathematische Grundlagen anhand von physikalischen Beispielen.
  - Newtonsche Mechanik (Bewegung makroskopischer Objekte mit kleinen Geschwindigkeiten, z.B. fallende Steine, kreisende Planeten).
  - Eventuell spezielle Relativitätstheorie (Bewegung makroskopischer Objekte mit nahezu Lichtgeschwindigkeit).

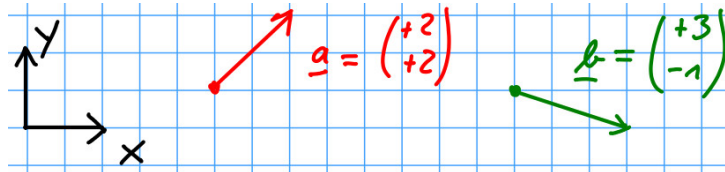
## 2 Kinematik von Massenpunkten

- Wiki: “Die **Kinematik** ist die Lehre der Bewegung von Punkten und Körpern im Raum ... ohne die Ursache der Bewegung (Kräfte) zu kennen.”
- Kinematik bildet Vorstufe der **Dynamik**, die die Kräfte mit einbezieht.
- Anstelle von ausgedehnten Objekten (Stein, Planet) betrachten wir häufig **Massenpunkte**:
  - Ausdehnung 0.
  - Approximation, die Rechnungen erheblich vereinfacht.
  - Approximation mag gut sein, wenn ausgedehntes Objekt nicht rotiert/seine Bewegung nicht von Rotation beeinflusst wird/etc. Güte der Approximation muss von Fall zu Fall diskutiert werden.  
(Ohne diese Approximation: Betrachte **Starre Körper** [“ausgedehnte feste Objekte”] statt Massenpunkte.)
- Position eines Massenpunkts durch  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Koordinate beschrieben, Zusammenfassung zu Vektor  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  (Einheit von  $x, y, z, \mathbf{r}$ : Länge, z.B. m).
- Sich bewegendes Massenpunkt:  $x, y$  und  $z$  sind zeitabhängig, also Funktionen der Zeit  $t$ , d.h.  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  bzw.  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  (wird als **Trajektorie** bezeichnet).
- Annahmen:
  - Absolute Zeit, d.h. Zeit vergeht für alle Beobachter gleich schnell.  
(Nicht mehr erfüllt in spezieller Relativitätstheorie, z.B. für sich bewegendes Beobachter vergeht die Zeit langsamer.)
  - Flacher Raum, kann mit kartesischen Koordinaten beschrieben werden, Abstände können mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden.  
(Nicht mehr erfüllt in allgemeiner Relativitätstheorie, z.B. Winkelsumme im Dreieck  $\neq 180^\circ$ .)

### 2.1 Grundlagen der Vektorrechnung

- Klassifikation physikalischer Größen:
  - **Skalare**: Eine Zahl (evtl. mit Einheit), z.B. Masse  $m$ , Temperatur  $T$ .
  - **Vektoren**: Im  $d$ -dimensionalen Raum Satz von  $d$  zusammengehörigen Größen (evtl. mit Einheit), besitzt eine Richtung (“Pfeil”), z.B. Position eines Massenpunkts  $\mathbf{r}$ , seine Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ .
  - **Tensoren**: Ein Satz von Größen, der mehrere Richtungen besitzt (kompliziert, daher erst später), z.B. Trägheitstensor (die Verallgemeinerung des Trägheitsmoments) oder Feldstärketensor (vereinheitlichte Beschreibung des elektrischen und magnetischen Felds).

- In Newtonscher Mechanik häufig 2- oder 3-dimensionale räumliche Vektoren, in spezieller Relativitätstheorie 4-dimensionale Raumzeitvektoren.
- Anschauliche Beschreibung eines Vektors: Pfeil.



- Notation: in Form seiner **Komponenten**, streng genommen als Spalte von Größen, z.B. in 3 Dimensionen

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

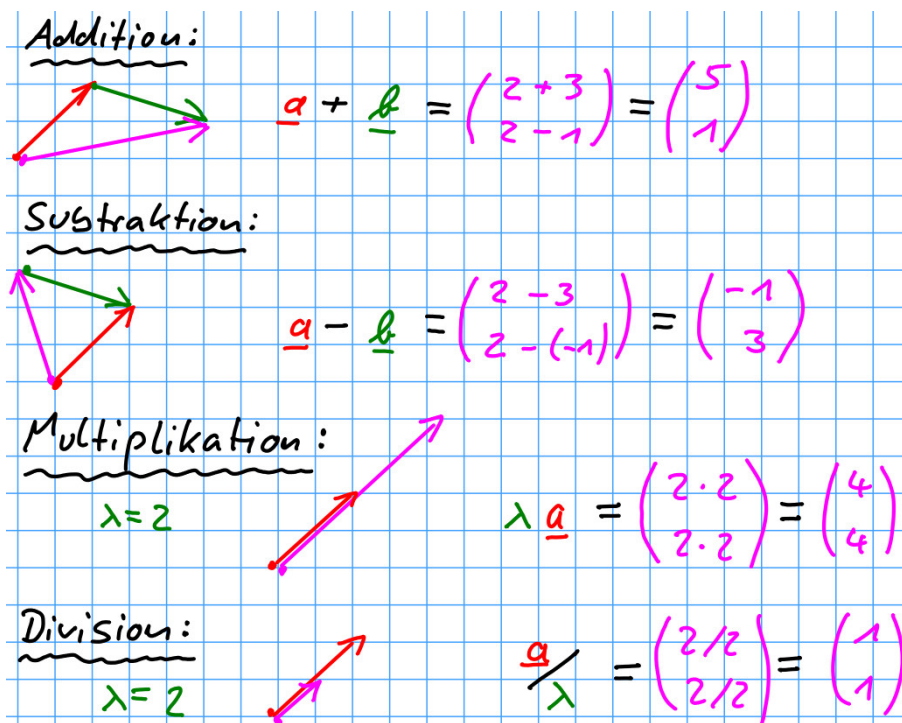
im Folgenden aber auch häufig als Zeile, d.h.  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  ist äquivalent.

- Grundlegende Rechenoperationen mit Vektoren und geometrische Bedeutung:

– **Addition:** (zwei Vektoren)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

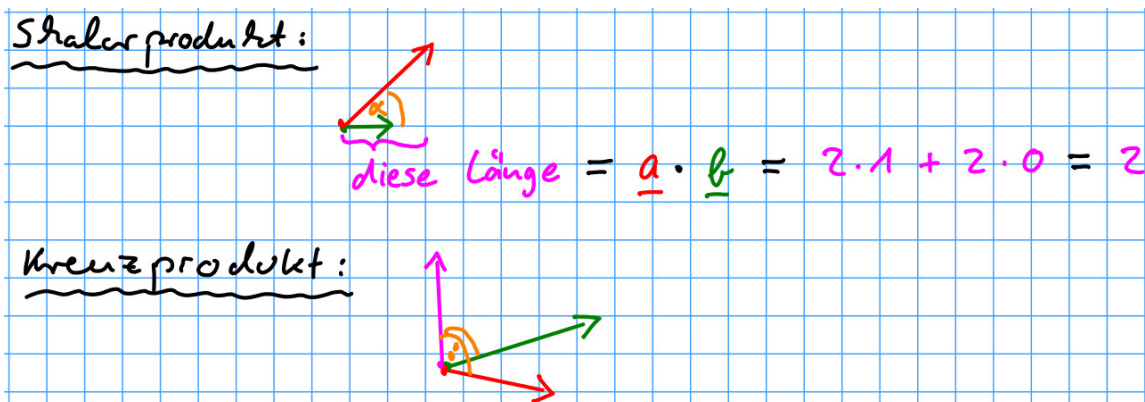
Entspricht Aneinandersetzen von Pfeilen (Pfeilende von  $\mathbf{b}$  an Pfeilspitze von  $\mathbf{a}$ ).



- **Subtraktion:** (zwei Vektoren)  
 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ .  
 Entspricht Aneinandersetzen von Pfeilen (Pfeilspitze von  $\mathbf{b}$  an Pfeilspitze von  $\mathbf{a}$ ).  
 \* Negativer Vektor  $-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$  ist umgekehrter Pfeil.
- **Multiplikation:** (Vektor und Zahl)  
 $\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ .  
 Länge des Pfeils wird um Faktor  $\lambda$  verändert.
- **Division:** (Vektor und Zahl)  
 $\mathbf{a}/\lambda = (a_1/\lambda, a_2/\lambda, a_3/\lambda)$ .  
 Länge des Pfeils wird um Faktor  $1/\lambda$  verändert.

\*\*\*\*\* 25. Oktober 2021 (2. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- **Multiplikation (Skalarprodukt):** (zwei Vektoren)  
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ .  
 Hat der Vektor  $\mathbf{b}$  Länge 1, entspricht  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  senkrechter Projektion von  $\mathbf{a}$  auf  $\mathbf{b}$ .



- \* Beispiel zur Illustration:  
 $\mathbf{a} = a(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$  ( $a$  ist die Länge von  $\mathbf{a}$ ),  $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$   
 $\rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cos(\alpha)$ .
- \* Allgemein  
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\alpha)$ . (2)
- \* Folglich kann man den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen,  
 $\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab}\right)$ , (3)  
 oder die Länge eines Vektors,  
 $a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$  (4)  
 (häufig auch Notation  $|\mathbf{a}| = a$ , **Betragsstriche** bzw. "**Betrag von a**"; nach letztem Gleichheitszeichen "Pythagoras").

- Multiplikation (Kreuz- bzw. Vektorprodukt):** (zwei Vektoren)  
 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ .



*Tipp: Eine Komponente zu merken, reicht aus ... Rest über zyklische Vertauschung, (123) → (231) → (312) (häufig in theoretischer Physik).*

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  sowohl **orthogonal** (= senkrecht) zu  $\mathbf{a}$  als auch zu  $\mathbf{b}$ .

\* Beispiel zur Illustration:

Erneut  $\mathbf{a} = a(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$

→  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, -a \sin(\alpha))$ .

\* Es gilt

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin(\alpha), \quad (5)$$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  entspricht also der Fläche des von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms.

\* Man kann den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen,

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{ab}\right). \quad (6)$$

\*  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \vec{0}$  (häufig schreibt man 0 statt  $\vec{0}$ ).

\* Ausrichtung von  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  über Rechte-Hand-Regel: Daumen =  $\mathbf{a}$ , Zeigefinger =  $\mathbf{b}$ , Mittelfinger =  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  (Voraussetzung: **Rechtshändiges Koordinatensystem**, d.h. Daumen =  $x$ -Achse, Zeigefinger =  $y$ -Achse, Mittelfinger =  $z$ -Achse).

\* Vorsicht:

· Skalare (“normale Zahlen”):

$a(b + c) = ab + ac$  (Distributivgesetz)

$ab = ba$  (Kommutativgesetz)

$a(bc) = (ab)c$  (Assoziativgesetz).

· Kreuzprodukt:

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$  (Distributivgesetz erfüllt)

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  (Kommutativgesetz nicht erfüllt)

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  (Assoziativgesetz nicht erfüllt).

– **Division:** (Vektor und Vektor)

Unsinn! Gibt es nicht! Niemals machen!

• Einheitsvektoren:

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$ ,

$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$ ,

$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ .

Damit  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z$ . Ausdrücken eines Vektors durch Einheitsvektoren (bzw. allgemeiner **orthonormale Basisvektoren** = Satz von senkrechten Vektoren der Länge 1) und den Komponenten bezüglich dieser Vektoren häufig zweckmäßig (Anwendungen später).

• Fast alle bisherigen Aussagen gelten in beliebiger Anzahl von Dimensionen  $d$ , z.B. Skalarprodukt

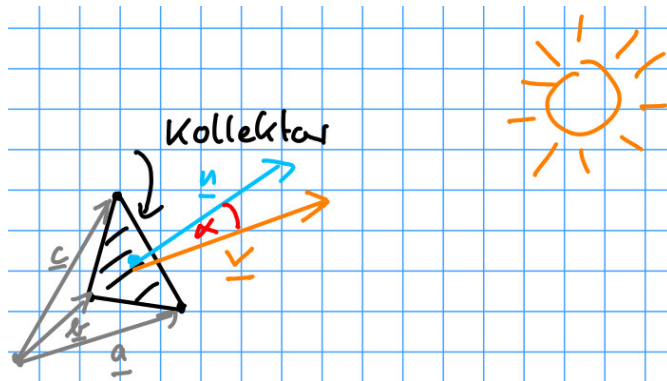
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n a_jb_j. \quad (7)$$

Ausnahme ist Kreuzprodukt, existiert nur in  $d = 3$  Dimensionen.

---

## Beispielaufgabe

Ein Dreieck (z.B. ein kleines Flächenstück eines Sonnenkollektors) ist durch seine Eckpunkte  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  definiert. Die Sonne steht in Richtung  $\mathbf{v}$  ( $\mathbf{v}$  hat Länge 1) am Himmel. Unter welchem Winkel treffen die Sonnenstrahlen auf das Dreieck?



- **Normale** des Dreiecks (= senkrecht auf dem Dreieck stehender Vektor der Länge 1):

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \quad \mathbf{u} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}). \quad (8)$$

- Winkel der Sonneneinstrahlung:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|}\right) = \arccos(|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|) \quad (9)$$

(die Betragstriche bei  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|$  sorgen für einen Winkel zwischen  $0 \dots 90^\circ$ ).

---

## 2.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

### 2.2.1 Geschwindigkeit

- 1-dimensionale Bewegung,  $x(t)$ :

- Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$ :

$$v_{\text{av}}(t, t + \Delta t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (10)$$

( $v$  von *velocity*; Einheit von  $v$ : Länge/Zeit, z.B. m/s).

- Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich im Grenzfalle  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{av}}(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) \quad (11)$$

( $\dot{x}$  ist abkürzende Schreibweise für "Zeitableitung von  $x$ "; zur Erinnerung: Ableitung einer Funktion  $f(x)$  ist  $f'(x) = (d/dx)f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x))/\Delta x$ ).

– Negatives Vorzeichen von  $v(t)$  möglich, entspricht Bewegung in negative  $x$ -Richtung.

- 3-dimensionale Bewegung,  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ :

– Analog:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)). \quad (12)$$

– Ableitung einer vektorwertigen Funktion durch Ableiten ihrer Komponenten.

– Die Geschwindigkeit in 3 Dimensionen ist ein 3-dimensionaler Vektor:

\* Betrag der Geschwindigkeit:

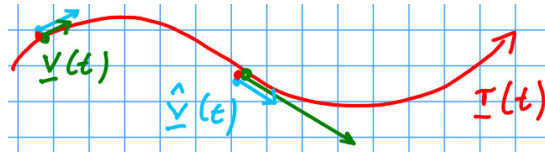
$$\begin{aligned} v(t) &= |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2 + (v_z(t))^2} = \\ &= \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

\* Richtung der Geschwindigkeit:

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \quad (14)$$

(eine Richtung hat Länge 1; man spricht auch von einem normierten Vektor, bezeichnet durch  $\hat{\cdot}$ , allgemein  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ ).

\* Geschwindigkeit bzw. Richtung der Geschwindigkeit ist Tangente an Trajektorie.



### 2.2.2 Beschleunigung

- Geschwindigkeit ist Veränderung des Ortes pro Zeit.
- Beschleunigung  $a$  bzw.  $\mathbf{a}$  ist Veränderung der Geschwindigkeit pro Zeit ( $a$  von *acceleration*).
- Damit Gleichungen aus Abschnitt 2.2.1 nach Ersetzung  $x \rightarrow v$  und  $v \rightarrow a$  bzw.  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}$  und  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{a}$  ebenfalls gültig, z.B.

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) \quad (15)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) \quad (16)$$

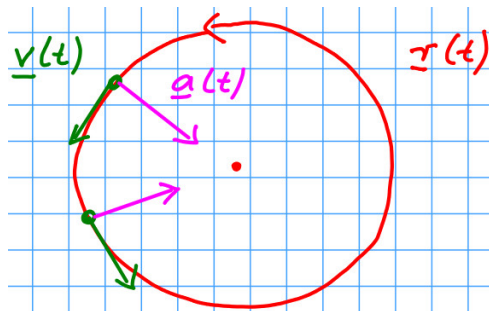
( $\ddot{x}$  ist abkürzende Schreibweise für “doppelte Zeitableitung von  $x$ ”; Einheit von  $a$ : Länge/Zeit<sup>2</sup>, z.B. m/s<sup>2</sup>).

### 2.2.3 Beispiel: Kreisbewegung

- Trajektorie einer Kreisbewegung (Radius  $R$ ) mit konstanter Geschwindigkeit (genauer  $|\mathbf{v}| = \text{const}$ ):

$$\mathbf{r}(t) = R(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t))) \quad , \quad \varphi(t) = \omega t \quad (17)$$

$$\rightarrow \mathbf{r}(t) = R(\cos(\omega t), \sin(\omega t)). \quad (18)$$



- $\omega$  ist die (hier konstante) Winkelgeschwindigkeit (Einheit: 1/Zeit, z.B. 1/s):

- Beziehung zum Betrag der Geschwindigkeit  $v$ :

Kreisumfang  $2\pi R$ ,

Zeitdauer eines Umlaufs  $2\pi/\omega$

... also  $v = 2\pi R / (2\pi/\omega) = R\omega$ .

- Analog zu  $v = \dot{x}$  gilt  $\omega = \dot{\varphi}$ .

- Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = R\omega(-\sin(\omega t), +\cos(\omega t)) \quad (19)$$

( $\omega$  aufgrund der Kettenregel:  $(d/dt)f(g(t)) = \dot{f}(g(t))\dot{g}(t)$ ; hier:  $f(g) = R\cos(g)$  bzw.  $f(g) = R\sin(g)$ ,  $g(t) = \omega t$ ).

- $(-\sin(\omega t), +\cos(\omega t))$  hat Länge 1 (wegen  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ), ist also normiert.

→ Betrag der Geschwindigkeit  $|\mathbf{v}(t)| = R\omega$  (konsistent mit obigen Überlegungen).

→ Richtung der Geschwindigkeit  $\hat{\mathbf{v}}(t) = (-\sin(\omega t), +\cos(\omega t))$ , Tangente an kreisförmige Trajektorie.

- Beschleunigung:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = R\omega^2(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t)). \quad (20)$$

- $(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t))$  hat Länge 1, ist also normiert.

→ Betrag der Beschleunigung  $|\mathbf{a}(t)| = R\omega^2$ .

→ Richtung der Beschleunigung  $\hat{\mathbf{a}}(t) = (-\cos(\omega t), -\sin(\omega t))$ , nach innen gerichtet (Zentripetalbeschleunigung, spürbar in Form nach außen gerichteter Zentrifugalkraft).

- Obwohl der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist, ist die Beschleunigung von 0 verschieden, da sich die Richtung der Beschleunigung ständig verändert.

### 3 Dynamik von Massenpunkten (Grundlagen)

- Ziel: Berechne bei gegebener Kraft auf einen Massenpunkt (z.B. Schwerefeld der Erde, vorgegebene Kraft erzeugt durch einen Raketenantrieb) die resultierende Trajektorie dieses Massenpunkts.

#### 3.1 Newtonsche Axiome

- **1. Axiom (Trägheitsprinzip):**

*Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Translation, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.*

- Scheint im ersten Moment unserer Alltagserfahrung zu widersprechen ( $\rightarrow$  Reibungskräfte).
- Sollte eigentlich strenger formuliert werden:  
*Es gibt Koordinatensysteme, in denen ein Körper ...*
- Solche Koordinatensysteme nennt man **Inertialsysteme** (Koordinatensysteme, die gegenüber dem Fixsternhimmel ruhen bzw. sich relativ dazu mit konstanter Geschwindigkeit bewegen; keine Intertialsysteme sind z.B. Koordinatensysteme innerhalb eines beschleunigenden Fahrzeugs oder auf einem Karusell).

- **2. Axiom (Aktionsprinzip):**

*Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.*

$$\dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (21)$$

(**Newtonsche Bewegungsgleichung (BGl)**).

- Zeitabhängigkeit von  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$ , ... hier und im Folgenden meist weggelassen.
- $m$  ist **träge Masse** (quantifiziert, wie stark ein Massenpunkt bei gegebener Kraft beschleunigt wird; hat zunächst nichts mit **schwerer Masse** zu tun, die im Gravitationsgesetz auftritt; Experiment:  $m_t = m_s$  mit großer Genauigkeit, daher meist keine Unterscheidung, d.h.  $m = m_t = m_s$ ).
- Kraft  $\mathbf{F}$  (Einheit: Masse  $\times$  Länge/Zeit<sup>2</sup>, z.B. kg m/s<sup>2</sup>) kann vom Ort  $\mathbf{r}$  abhängen (z.B. Gravitationsfeld), von der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{r}}$  (z.B. Luftwiderstand) und von der Zeit  $t$  (z.B. sich veränderndes elektrisches Feld).
- $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{v}$  ist der **Impuls** (Einheit: Masse  $\times$  Länge/Zeit, z.B. kg m/s).
- (21) ist eine **Differentialgleichung (DGl)** (genauer eine **gewöhnliche Differentialgleichung**), d.h. eine Gleichung in der eine Funktion (hier  $\mathbf{r}$ ) in einer Variable (hier  $t$ ) und deren Ableitungen (hier  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$ ) auftreten; ein Großteil der theoretischen Physik besteht aus dem Lösen von DGLs (hier dem Finden einer speziellen Trajektorie oder aller möglichen Trajektorien  $\mathbf{r}$  bei gegebener Kraft  $\mathbf{F}$ ).

- **3. Axiom (Wechselwirkungsprinzip):**

*Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper 1 auf einen anderen Körper 2 eine*

Kraft aus (*actio*), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper 2 auf Körper 1 (*reactio*).

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}. \quad (22)$$

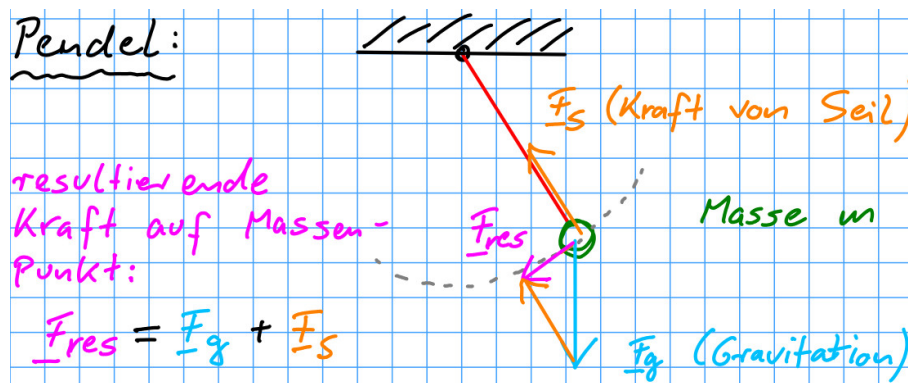
• **4. Axiom (Superpositionsprinzip):**

Wirken auf einen Punkt (oder einen starren Körper) mehrere Kräfte, so addieren sich diese vektoriell zu einer resultierenden Kraft auf.

$$\mathbf{F}_{\text{res}} = \sum_j \mathbf{F}_j. \quad (23)$$

\*\*\*\*\* 01. November 2021 (4. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Zeichnen aller auftretenden Kräfte ist häufig zum Verständnis eines physikalischen Problems hilfreich.



### 3.2 Typische in der Mechanik auftretende Kräfte

• **Gravitationskraft:**

Ein Massenpunkt 1 ([schwere] Masse  $m_1$ ) übt auf einen Massenpunkt 2 ([schwere] Masse  $m_2$ ) die Gravitationskraft

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2} \quad (24)$$

aus<sup>1</sup>.

- $G = 6.674 \dots \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ , **Gravitationskonstante**.
- $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ , Abstand der beiden Massenpunkte.
- $\hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ , Richtung der Kraft, von 1 nach 2.
- Stärke der Gravitationskraft nimmt quadratisch mit Abstand ab.

<sup>1</sup>Diskussion träge vs. schwere Masse, siehe Abschnitt 3.1.

–  $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$  (3. Newtonsches Axiom).

- **Erdanziehung:**

Bei Bewegung eines Massenpunkts (Masse  $m$ ) in vergleichsweise kleinem Gebiet Näherung der Gravitationskraft (24) gemäß

$$\mathbf{F}_g = -mge_z. \quad (25)$$

- Kleines Gebiet: Relative (d.h. prozentuale) Veränderung von  $r_{12}$  und  $\hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2}$  klein.
- $z$ -Achse zeigt nach oben.
- Beziehung zwischen  $G$  und  $g$  (Ortsfaktor):  $g = GM/R^2$ , wobei  $M$  die Erdmasse und  $R$  der Erdradius ist ( $M \approx 5.97 \times 10^{24}$  kg,  $R \approx 6.37 \times 10^6$  m; damit  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ).  
*Bemerkung: Man müsste und kann zeigen, dass die über den gesamten Erdball verteilte Masse über der Erdoberfläche die gleiche Kraft erzeugt wie ein am Erdmittelpunkt sitzender Massenpunkt, dessen Masse der Erdmasse entspricht (siehe Abschnitt 9.2).*

- **Harmonische Kraft:**

Kraft proportional zur Auslenkung aus einer Ruhelage  $\mathbf{r}_0$ :

$$\mathbf{F} = -k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (26)$$

- Realisierbar z.B. mit Feder (festgemacht bei  $\mathbf{r}_0$ , Ruhelänge 0), gültig für kleine Auslenkungen.
- Massenpunkte, die unter Einfluss einer harmonischen Kraft (26) schwingen, werden als **harmonische Oszillatoren** bezeichnet.
- Sehr allgemein anwendbar: Systeme von Massenpunkten in der Nähe von Gleichgewichtslagen schwingen harmonisch (mehr dazu z.B. in der Vorlesung “Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik” im Sommersemester); tritt häufig auf, sehr wichtig.

- **Reibungskräfte:**

- $\mathbf{F} = -\alpha \hat{\mathbf{v}}$  (konstant); z.B. Gleit- und Rollreibung.
- $\mathbf{F} = -\beta v \hat{\mathbf{v}}$  (linear, Newton); z.B. langsame Bewegung in Flüssigkeiten.
- $\mathbf{F} = -\gamma v^2 \hat{\mathbf{v}}$  (quadratisch, Stokes); z.B. schnelle Bewegung in Luft.
- Stets der Geschwindigkeit entgegen gerichtet.
- In Natur meist viel komplizierter; obige Formeln dienen grober Modellierung von Reibung für ein vorliegendes System.

### 3.3 Lösung der Newtonschen BGl für spezielle “einfache Kräfte” (1)

- Lösen von DGLs (z.B. Newtonsche BGl (21)) i.A. sehr schwierig.
- Analytisch nur für spezielle “einfache Kräfte” möglich.
- Ansonsten Einsatz von Computern für numerische Lösung erforderlich.

- Numerik/Computereinsatz ist wichtiger Teil moderner Physik.  
*Tipp: Möglichst bald mit Computer vertraut machen (Datenanalyse, Plotten von Funktionen, Programmieren, Computeralgebrasysteme, etc.).*
- Analytische Lösung ist numerischer Lösung immer überlegen, daher, wenn möglich, BGl analytisch lösen.
- Oft Kombination erforderlich, z.B. analytische Vorbereitungen damit Numerik funktioniert.

### 3.3.1 Verschwindende Kraft $F = 0$

- Beispiel: Bewegung fernab von Gravitationsquellen im Weltraum.
- Freie Newtonsche BGl (d.h.  $F = 0$ ) in 1 Dimension:

$$m\ddot{x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} = 0. \tag{27}$$

- **Methode 1 (durch “scharfes Hinschauen und Überlegen”):**

- Welche Funktion  $x(t)$  ist zweifach abgeleitet 0?
- Konstante,  $x(t) = A$ .
- Linearer Term,  $x(t) = Bt$ .
- Allgemeine Lösung:  $x(t) = Bt + A$ .
- Bedeutung von  $A$ :  
 $x(t = 0) = A$ , also ist  $A$  die Position des Massenpunkts bei  $t = 0$  ... verwende zur besseren Lesbarkeit Notation  $A \rightarrow x_0$ .
- Bedeutung von  $B$ :  
 $\dot{x} = B$ , also ist  $B$  die Geschwindigkeit des Massenpunkts bei  $t = 0$  (und auch zu jedem anderen Zeitpunkt) ... verwende zur besseren Lesbarkeit Notation  $B \rightarrow v_0$ .
- Damit  $x(t) = v_0t + x_0$ .
- $x_0, v_0$  sind frei wählbare Konstanten.
  - \* Parametrisieren mögliche Lösungen der freien Newtonschen BGl (hat nicht nur eine Lösung, sondern unendlich viele, alle möglichen Trajektorien bei verschwindender Kraft, d.h. geradlinige Bewegungen mit beliebigem Startpunkt und beliebiger Geschwindigkeit).
  - \* Müssen so gewählt werden, dass **Anfangsbedingungen** (ABs) erfüllt sind, z.B. Vorgabe von Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = 0$ ,  $x(t = 0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t = 0) = v_0$ .

\*\*\*\*\* 05. November 2021 (5. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Allgemein: Vollständige Lösung einer **gewöhnlichen DGl  $n$ -ter Ordnung** (Funktion und deren 1-te bis  $n$ -te Ableitung treten auf) beinhaltet  $n$  unbestimmte Konstanten.



- ABs der Newtonschen BGl müssen nicht notwendig Ort und Geschwindigkeit bei  $t = 0$  sein, wie folgendes Beispiel zeigt.

### Beispielaufgabe

Berechne die Trajektorie eines sich frei bewegenden Massenpunkts, der sich zur Zeit  $t_1$  bei  $x_1$  und zur Zeit  $t_2$  bei  $x_2$  befindet.

- Starte mit allgemeiner Lösung  $x(t) = Bt + A$ .
- Stelle Gleichungssystem zur Bestimmung von  $A$  und  $B$  auf:
  - (1):  $x(t_1) = Bt_1 + A = x_1$
  - (2):  $x(t_2) = Bt_2 + A = x_2$ .
- Löse Gleichungssystem:
  - (2) – (1):  $B(t_2 - t_1) = x_2 - x_1 \quad \rightarrow \quad B = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ .
  - (1):  $A = x_1 - Bt_1 = x_1 - ((x_2 - x_1)/(t_2 - t_1))t_1$ .
- Endergebnis:

$$x(t) = \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}_{=v} (t - t_1) + x_1. \quad (28)$$

- **Methode 2 (“unbestimmte Integration”):**

- Integriere BGl 2-mal ohne Verwendung von Integrationsgrenzen (unbestimmte Integrale):

$$\int dt \ddot{x} = \int dt 0 \quad \rightarrow \quad \dot{x} = B \quad (29)$$

$$\int dt \dot{x} = \int dt B \quad \rightarrow \quad x = Bt + A. \quad (30)$$

- ABs wie bei Methode 1 (Gleichungssystem aufstellen und lösen).

- **Methode 3 (“bestimmte Integration”):**

- Integriere BGl 2-mal mit Verwendung von Integrationsgrenzen (bestimmte Integrale), z.B. von festem Startzeitpunkt 0 zu “aktuellem Zeitpunkt”  $t$ :

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \ddot{x}(t') &= \int_0^t dt' 0 \quad \rightarrow \quad \dot{x}(t') \Big|_{t'=0}^{t'=t} = C \Big|_{t'=0}^{t'=t} \\ \rightarrow \quad \dot{x}(t) - \underbrace{\dot{x}(t=0)}_{=v_0} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\int_0^t dt' (\dot{x}(t') - v_0) = \int_0^t dt' 0 \quad (32)$$

$$\rightarrow \quad (x(t') - v_0 t') \Big|_{t'=0}^{t'=t} = C \Big|_{t'=0}^{t'=t} \quad \rightarrow \quad x(t) - v_0 t - \underbrace{x(t=0)}_{=x_0} = 0, \quad (33)$$

also  $x(t) = v_0 t + x_0$  (beachte, dass Integrationsvariable in  $t'$  umbenannt wurde, darf nicht  $t$  lauten, da  $t$  bereits als Integrationsgrenze verwendet wird).

– ABs  $x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = v_0$  automatisch erfüllt.

- Alle drei Methoden äquivalent, Geschmacksfrage bzw. manchmal eine Methode zweckmäßiger als eine andere.
- Freie Newtonsche BGl (d.h.  $\mathbf{F} = 0$ ) in 3 Dimensionen:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\mathbf{r}} = 0. \tag{34}$$

– Entspricht drei unabhängigen DGLs,  $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = 0, \ddot{z} = 0$ .

– Lösung jeder der drei Gleichungen wie im 1-dimensionalen Fall, d.h.

$$x(t) = v_{0,x}t + x_0$$

$$y(t) = v_{0,y}t + y_0$$

$$z(t) = v_{0,z}t + z_0,$$

$$\text{insgesamt } \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0.$$

– Für eindeutige Trajektorie 6 ABs notwendig, z.B.  $\mathbf{r}(t=0), \dot{\mathbf{r}}(t=0)$ .

### 3.3.2 Konstante Kraft $\mathbf{F} = \text{const}$

- Beispiele: Erdanziehung, d.h. fallender Massenpunkt, geladenes Teilchen im Plattenkondensator.
- Newtonsche BGl in 1 Dimension:

$$m\ddot{x} = F = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} = F/m = \text{const}. \tag{35}$$

- **Methode 1:**

– Welche Funktion  $x(t)$  ist zweifach abgeleitet  $F/m$ ?

–  $x(t) = (F/m)t^2/2$ .

– Außerdem

Addition einer Konstante möglich,  $x(t) \rightarrow x(t) + x_0$ ,

Addition eines linearen Terms möglich,  $x(t) \rightarrow x(t) + v_0 t$ .

– Allgemeine Lösung:

$$x(t) = \frac{F}{2m}t^2 + v_0 t + x_0 \tag{36}$$

(vollständige Lösung, da DGl 2-ter Ordnung und 2 unbestimmte Konstanten  $x_0, v_0$ ).

– Bestimmung von  $x_0, v_0$  über Vorgabe von ABs und Lösen eines Gleichungssystems (analog zum freien Fall).

• **Methode 3:**

$$\int_0^t dt' \ddot{x}(t') = \int_0^t dt' \frac{F}{m} \rightarrow \dot{x}(t') \Big|_{t'=0}^{t'=t} = \frac{F}{m} t' \Big|_{t'=0}^{t'=t}$$

$$\rightarrow \dot{x}(t) - \underbrace{\dot{x}(t=0)}_{=v_0} = \frac{F}{m} t \quad (37)$$

$$\int_0^t dt' (\dot{x}(t') - v_0) = \int_0^t dt' \frac{F}{m} t' \quad (38)$$

$$\rightarrow (x(t') - v_0 t') \Big|_{t'=0}^{t'=t} = \frac{F}{2m} t'^2 \Big|_{t'=0}^{t'=t} \rightarrow x(t) - v_0 t - \underbrace{x(t=0)}_{=x_0} = \frac{F}{2m} t^2. \quad (39)$$

• Newtonsche BGl in 3 Dimensionen:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \text{const.} \quad (40)$$

- Entspricht drei unabhängigen DGLs, eine Gleichung für  $x$ , eine für  $y$ , eine für  $z$  (analog zum freien Fall).
- Lösung jeder der drei Gleichungen wie im 1-dimensionalen Fall.
- Bei 2 oder 3 Dimensionen Mischung verschiedener Kräfte möglich, wie z.B. in folgender Aufgabe.

\*\*\*\*\* 08. November 2021 (6. Vorlesung) \*\*\*\*\*

**Beispielaufgabe**

Ein Massenpunkt (Masse  $m$ ) bewegt sich unter dem Einfluss der konstanten Schwerkraft  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet er sich am Ort  $\mathbf{r}_0$ , seine Geschwindigkeit beträgt  $\mathbf{v}_0$ . Berechne die Trajektorie des Massenpunkts.

- Schwerkraft wirkt in negative  $z$ -Richtung, d.h. konstante Kraft in  $z$ -Komponente.
- $x$ - und  $y$ -Komponente: Freie Bewegung.
- Viel mehr gibt es nicht zu tun ... Abschreiben der oben erzielten Ergebnisse führt zu

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{g}{2}t^2\mathbf{e}_z + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 = \left( v_{0,x}t + x_0, v_{0,y}t + y_0, -\frac{g}{2}t^2 + v_{0,z}t + z_0 \right). \quad (41)$$

### 3.3.3 Zeitabhängige Kraft $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ (aber nicht ortsabhängig)

- Beispiel: Motor/Rakete, mit zeitabhängiger Antriebskraft.
- Newtonsche BGl in 3 Dimensionen:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t). \quad (42)$$

- Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \ddot{\mathbf{r}}(t'') &= \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \frac{\mathbf{F}(t'')}{m} \\ \rightarrow \mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \frac{\mathbf{F}(t'')}{m} \end{aligned} \quad (43)$$

(nur formale Lösung, konkrete Lösung [analytisch oder numerisch] erfordert Vorgabe von  $\mathbf{F}(t)$ ).

### 3.3.4 Lineare Reibungskraft

- 2-fache Integration der Newtonschen BGl nur möglich, wenn Kraft nicht von  $\mathbf{r}$  oder  $\dot{\mathbf{r}}$  abhängt; Letzteres häufig der Fall, wie z.B. im Folgenden.
- Newtonsche BGl in 1 Dimension:

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x}. \quad (44)$$

- Im Gegensatz zu bisher diskutierten Fällen eine "echte DGl", d.h. verschiedene Ableitungen von  $x$  treten auf ( $\dot{x}$  und  $\ddot{x}$ , nicht nur  $\ddot{x}$ , wie bisher).
- 2-fache Integration der Newtonschen BGl daher nicht möglich.
- (44) ist DGl 2-ter Ordnung, kann aber problemlos auf DGl 1-ter Ordnung reduziert werden,

$$m\dot{v} = -\beta v. \quad (45)$$

- Wenn Lösung  $v$  vorliegt, einfach integrieren,

$$\dot{x} = v \rightarrow x = x_0 + \int_0^t dt' v(t'). \quad (46)$$

- Benötigen also Lösungsmethoden für (45).

- **Methode 1 (Exponentialansatz):**

- (45) hat Struktur  $\dot{v} = v$ , d.h. welche Funktion ergibt abgeleitet sich selbst?  
Antwort: exp-Funktion.
- Legt Ansatz  $v = Ae^{Bt}$  nahe.

– Einsetzen in (45):

$$mABe^{Bt} = -\beta Ae^{Bt} \rightarrow mB = -\beta. \quad (47)$$

– Ansatz ist Lösung für beliebiges  $A$  und  $B = -\beta/m$ , d.h.  $v = Ae^{-(\beta/m)t}$  ( $A$  ist unbestimmte Konstante, die vollständige Lösung einer DGL 1-ter Ordnung enthalten muss; da  $v(t=0) = A$ , Umbenennung  $A \rightarrow v_0$  zweckmäßig).

– Exponentialansatz geeignet, wenn sämtliche Terme der DGL linear in  $x$ ,  $\dot{x}$  oder  $\ddot{x}$ , d.h. eine **lineare (gewöhnliche) DGL** vorliegt ( $\dot{x}^2$ ,  $x\dot{x}$ ,  $\sin(x)$  etc. dürfen nicht auftreten).

– Integration (zur Vollständigkeit; hat nichts mit Exponentialansatz zu tun):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_0^t dt' v_0 e^{-(\beta/m)t'} = x_0 - \frac{v_0 m}{\beta} e^{-(\beta/m)t'} \Big|_0^t = \\ &= x_0 + \frac{v_0 m}{\beta} (1 - e^{-(\beta/m)t}). \end{aligned} \quad (48)$$

– Check:  $v_0 m/\beta$  hat Einheit Länge.

– Physikalische Interpretation: Bewegung verlangsamt sich exponentiell, Massenpunkt kommt nach Strecke  $v_0 m/\beta$  zur Ruhe.

• **Methode 2 (Trennung der Variablen):**

– Allgemein:

\* Gegeben: DGL der Form

$$\frac{dy}{dx} = F(x)G(y). \quad (49)$$

\* Lösung: Bringe alle  $x$  und  $dx$  auf die rechte Seite, alle  $y$  und  $dy$  auf die linke Seite, dann Integration,

$$dy \frac{1}{G(y)} = dx F(x) \quad (50)$$

$$\int dy \frac{1}{G(y)} = \int dx F(x) \quad \text{bzw.} \quad \int_{y_0}^y dy' \frac{1}{G(y')} = \int_{x_0}^x dx' F(x'). \quad (51)$$

\*\*\*\*\* 12. November 2021 (7. Vorlesung) \*\*\*\*\*

– Konkret:

\* Gegeben:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}v. \quad (52)$$

\* Lösung:

· Zunächst

$$dv \frac{1}{v} = -dt \frac{\beta}{m}. \quad (53)$$

· Dann unbestimmte Integration,

$$\begin{aligned} \int dv \frac{1}{v} &= -\int dt \frac{\beta}{m} \\ \rightarrow \ln(v/A) &= -\frac{\beta}{m}t \rightarrow v = Ae^{-(\beta/m)t}. \end{aligned} \quad (54)$$

Links oder rechts muss unbestimmte Konstante stehen.

Bei Lösung einer mathematischen Gleichung gleicher Struktur (einheitenlose Größen  $v, \beta, \dots$ ) würde man  $\ln(v) + A'$  schreiben (äquivalent zu Konstante im  $\ln$ , da  $\ln(v) + A' = \ln(v) + \ln(e^{A'}) = \ln(v/e^{-A'})$ ); ist aufgrund von Einheiten in Physik nicht möglich.

$A$  hat Einheit einer Geschwindigkeit, entspricht  $v_0$  (siehe oben), also  $A \rightarrow v_0$ .

Oder bestimmte Integration,

$$\int_{v_0}^v dv' \frac{1}{v'} = - \int_0^t dt' \frac{\beta}{m}$$

$$\rightarrow \ln(v/v_0) = -\frac{\beta}{m}t \rightarrow v = v_0 e^{-(\beta/m)t}. \quad (55)$$

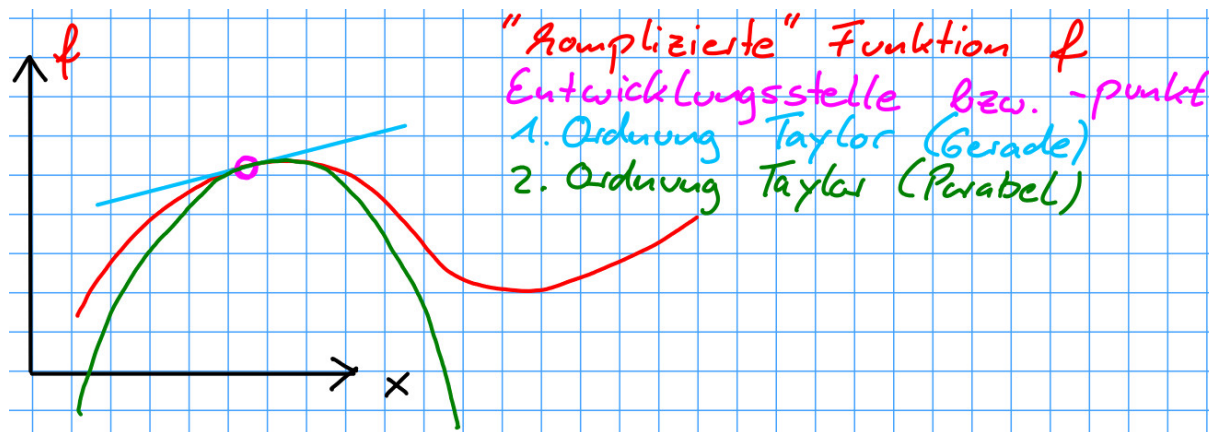
(obere und untere Integrationsgrenzen hängen jeweils zusammen: Geschwindigkeit  $v_0$  bzw.  $v$  zur Zeit 0 bzw.  $t$ ).

### 3.4 Einschub: Taylor-Näherung

- Nähere komplizierte Funktion  $f(x)$  in der Nähe eines Punkts  $x_0$  (**Entwicklungsstelle**) durch einfaches Polynom (**Taylor-Polynom**), d.h. meist niedriger Grad.
- Anschaulich:  $f(x)$  kann durch Tangente bei  $x_0$  genähert werden,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (56)$$

(Taylor-Näherung 1-ter Ordnung).



- Noch immer anschaulich: Hinzunahme eines quadratischen Terms  $\propto (x-x_0)^2$ , der Krümmung bei  $x_0$  beschreibt,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \quad (57)$$

(Taylor-Näherung 2-ter Ordnung).

- Terme wurden so gewählt, dass Funktionswert, 1-te und 2-te Ableitung der Näherung mit entsprechenden Werten von  $f$  übereinstimmen, d.h.

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \Big|_{x=x_0} = f(x_0) \quad (58)$$

$$\left( \frac{d}{dx} \left( f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \right) \right) \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) \quad (59)$$

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} \left( f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \right) \right) \Big|_{x=x_0} = f''(x_0). \quad (60)$$

- Verallgemeinerung zu  $n$ -ter Ordnung:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (61)$$

( $f^{(k)}$ :  $k$ -te Ableitung von  $f$ ).

- In Nähe der Entwicklungsstelle, d.h. für  $x \approx x_0$ , werden höhere Terme  $\propto (x - x_0)^k$  immer unbedeutender, da  $x - x_0$  klein.
- $n \rightarrow \infty$  (**Taylor-Reihe**):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (62)$$

(in speziellen Fällen exakte Beschreibung von  $f$  durch Polynom, kann aber auch nicht oder nur in Nähe von  $x_0$  konvergieren; mehr in Mathe-Vorlesungen).

- Häufig Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ , dann

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \quad \text{bzw.} \quad f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2. \quad (63)$$

- $\mathcal{O}(x^k)$ -Notation (“Ordnung  $x^k$ ”):

- $\mathcal{O}(x^k)$  steht für  $a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + a_{k+2} x^{k+2} + \dots$ , d.h. ein Polynom, dessen niedrigste Potenz  $x^k$  oder höher ist.

- Z.B.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \mathcal{O}(x^2) \quad (64)$$

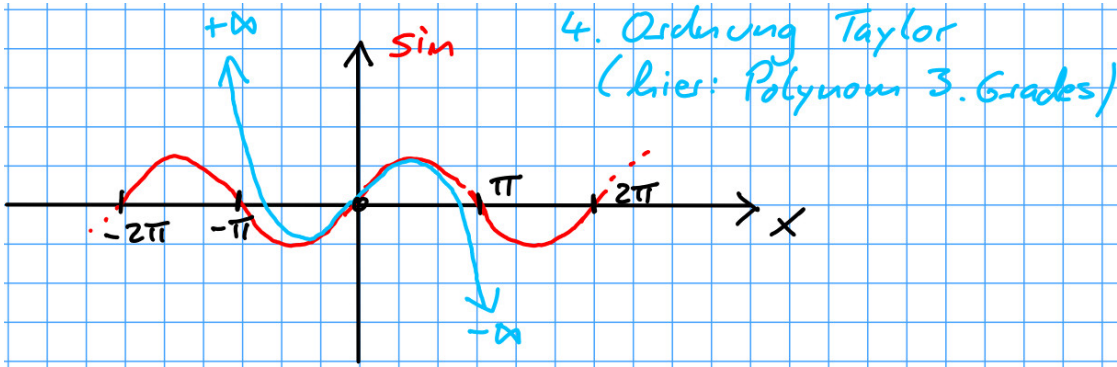
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad (65)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \mathcal{O}((x - x_0)^{n+1}). \quad (66)$$

- Präziser als  $\approx$ , man sieht genau, welche Potenzen vernachlässigt wurden.

- Beispiel: Taylor-Näherung von  $f(x) = \sin(x)$ , Entwicklungsstelle  $x_0 = 0$ .

- $f'(x) = \cos(x)$ ,  $f''(x) = -\sin(x)$ ,  $f'''(x) = -\cos(x)$ ,  $f''''(x) = \sin(x)$ .
- $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) = -1$ ,  $f''''(0) = 0$ .
- Damit  $\sin(x) = x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)$ .



\*\*\*\*\* 15. November 2021 (8. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Taylor-Näherungen niedriger Ordnungen (ein oder zwei Terme) elementarer Funktionen sollte man auswendig lernen, z.B.
  - $\cos(x) = 1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)$ ,  $\tan(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ , ... (weitere Winkelfunktionen als Übungsaufgabe),
  - $e^x = 1 + x + x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)$ ,  $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$ ,
  - $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + \mathcal{O}(x^2)$ ,
  - $1/(1+x) = 1 - x + \mathcal{O}(x^2)$ ,

dann kann man durch einfaches “Ineinandersetzen” Taylor-Näherungen komplizierter Funktionen angeben, ohne umständlich Ableitungen berechnen zu müssen, z.B.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{A^2 + (\sin(Bx))^2}} &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + (Bx + \mathcal{O}(x^3))^2}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2x^2 + \mathcal{O}(x^4)}} = \\
 &= \frac{1}{A\sqrt{1 + (B/A)^2x^2 + \mathcal{O}(x^4)}} = \frac{1}{A(1 + (B/A)^2x^2/2 + \mathcal{O}(x^4))} = \\
 &= \frac{1 - (B/A)^2x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)}{A} = \frac{1}{A} - \frac{B^2}{2A^3}x^2 + \mathcal{O}(x^4). \tag{67}
 \end{aligned}$$

### Beispielaufgabe

Zeige, dass die 1-dimensionale Bewegung unter Einfluss der linearen Reibungskraft  $-\beta\dot{x}$ ,

$$x = x_0 + \frac{v_0 m}{\beta} \left(1 - e^{-(\beta/m)t}\right) \tag{68}$$

(Gleichung (48)), im Grenzfalle  $\beta \rightarrow 0$  in die freie Bewegung  $x = v_0 t + x_0$  übergeht. (Check des Ergebnisses aus Abschnitt 3.3.4.)



- $\lim_{\beta \rightarrow 0} x = x_0 + \infty \times 0$ , ein unbestimmter Ausdruck.
- Berechnung mit Regel von L'Hospital möglich ... aber unüblich, da unpraktisch.
- Taylor-Näherung:

$$e^{-(\beta/m)t} = 1 - \frac{\beta}{m}t + \mathcal{O}(\beta^2) \quad (69)$$

$$x = x_0 + \frac{v_0 m}{\beta} \left( \frac{\beta}{m}t + \mathcal{O}(\beta^2) \right) = x_0 + v_0 t + \mathcal{O}(\beta). \quad (70)$$

- $\lim_{\beta \rightarrow 0} x = x_0 + v_0 t$ .

### 3.5 Lösung der Newtonschen BGl für spezielle “einfache Kräfte” (2)

#### 3.5.1 Konstante Kraft und lineare Reibungskraft

- Häufig Kombination mehrerer Kräfte, z.B. konstante Kraft und lineare Reibungskraft (sinkender Stein im Wasser).
- Bei konstanter Schwerkraft  $-mg\mathbf{e}_z$  und ABs  $v_x(t=0) = v_y(t=0) = 0$  gilt  $x = \text{const}$  und  $y = \text{const}$ , Rechnung kann also auf eine Dimension reduziert werden.
- Newtonsche BGl:

$$m\ddot{z} = -mg - \beta\dot{z}. \quad (71)$$

- DGl für  $v = v_z$ :

$$\dot{v} = -g - \frac{\beta}{m}v. \quad (72)$$

- Trennung der Variablen (AB:  $v(t=0) = v_0$ ):

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\beta}{m}v \quad (73)$$

$$\int_{v_0}^v dv' \frac{1}{g + (\beta/m)v'} = - \int_0^t dt' \quad (74)$$

$$\rightarrow \frac{m}{\beta} \ln \left( \frac{g + (\beta/m)v}{g + (\beta/m)v_0} \right) = -t \rightarrow v = \frac{m}{\beta} \left( \left( g + \frac{\beta}{m}v_0 \right) e^{-(\beta/m)t} - g \right). \quad (75)$$

- Check:
  - Einheiten ... o.k.
  - Spezialfall  $g = 0$ :
    - $v|_{g=0} = v_0 e^{-(\beta/m)t}$  ... konsistent mit Abschnitt 3.3.4.

- Spezialfall  $\beta = 0$ :  
Schwieriger ...

$$v \Big|_{\beta=0} = \underbrace{\frac{m}{\beta}}_{=\infty} \underbrace{\left( \left( g + \frac{\beta}{m} v_0 \right) e^{-(\beta/m)t} - g \right)}_{=0} \quad (76)$$

... also unbestimmter Ausdruck  $\infty \times 0$ ; verwende Taylor-Entwicklung in  $\beta$ ,

$$e^{-(\beta/m)t} = 1 - \frac{\beta}{m}t + \mathcal{O}(\beta^2) \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \left( g + \frac{\beta}{m} v_0 \right) e^{-(\beta/m)t} &= \left( g + \frac{\beta}{m} v_0 \right) \left( 1 - \frac{\beta}{m}t + \mathcal{O}(\beta^2) \right) = \\ &= g + \frac{\beta}{m} (v_0 - gt) + \mathcal{O}(\beta^2) \end{aligned} \quad (78)$$

$$v = \frac{m}{\beta} \left( g + \frac{\beta}{m} (v_0 - gt) - g + \mathcal{O}(\beta^2) \right) = v_0 - gt + \mathcal{O}(\beta) \quad (79)$$

$$v \Big|_{\beta=0} = v_0 - gt \quad (80)$$

... konsistent mit Abschnitt 3.3.2.

- Physikalische Interpretation:

- Kleine  $t$ : Erneut Taylor-Entwicklung, nun in  $t$ ,

$$e^{-(\beta/m)t} = 1 - \frac{\beta}{m}t + \mathcal{O}(t^2) \quad (81)$$

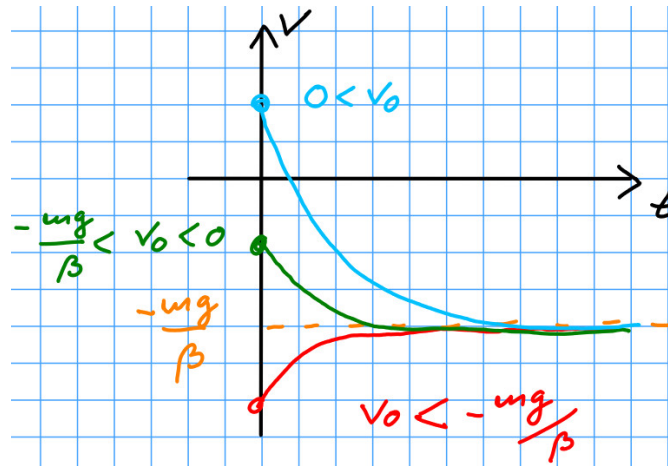
$$\begin{aligned} v &= \frac{m}{\beta} \left( \left( g + \frac{\beta}{m} v_0 \right) \left( 1 - \frac{\beta}{m}t + \mathcal{O}(t^2) \right) - g \right) = \\ &= v_0 - \left( g + \frac{\beta}{m} v_0 \right) t + \mathcal{O}(t^2), \end{aligned} \quad (82)$$

Geschwindigkeit verändert sich, ausgehend vom Startwert  $v_0$ , zunächst linear, genau wie bei konstanter Kraft  $-(mg + \beta v_0)$ .

- Große  $t$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = -\frac{mg}{\beta}, \quad (83)$$

Geschwindigkeit nähert sich exponentiell schnell diesem Wert an (Wert auch aus Kräftegleichgewicht erhältlich:  $F_g + F_{\text{Reibung}} = 0$ , also  $-mg - \beta v = 0$  bzw.  $v = -mg/\beta$ ).



- Integration führt auf  $z$ ,

$$z = z_0 + \int_0^t dt' v(t') = \dots \quad (\text{Übungsaufgabe}).$$

\*\*\*\*\* 19. November 2021 (9. Vorlesung) \*\*\*\*\*

### 3.6 DGls: Zusammenfassung und Ergänzungen

- Newtonsche BGl  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$  ist eine **gewöhnliche DGl** (gewöhnlich  $\rightarrow$  gesuchte Funktion  $\mathbf{r}$  hängt nur von einer Variable  $t$  ab) **2-ter Ordnung** ( $\rightarrow$  höchste Ableitung ist 2-te Ableitung).
- In 3 Dimensionen handelt es sich genauer gesagt um 3 im Allgemeinen **gekoppelte DGls**,

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (84)$$

$$m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (85)$$

$$m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (86)$$

(gekoppelt  $\rightarrow$  in einer Gleichung z.B. nicht nur  $x$ , sondern  $x$  und  $y$ ), die nicht unabhängig voneinander gelöst werden können.

- Für spezielle Kräfte  $\mathbf{F} = (F_x(x, \dot{x}, t), F_y(y, \dot{y}, t), F_z(z, \dot{z}, t))$  entkoppeln diese 3 DGls, d.h. können unabhängig nacheinander gelöst werden (**unabhängige DGls**) ... also drei 1-dimensionale und damit viel einfachere Probleme.
- Beispiele:

- Lineare Reibungskraft  $\mathbf{F} = -\beta\dot{\mathbf{r}} = -\beta(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$   
 $\rightarrow$  3 ungekoppelte DGls (einfach).

- Quadratische Reibungskraft  $\mathbf{F} = -\gamma\sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2}\dot{\mathbf{r}} = -\gamma(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\dot{x}, \dots)$   
 $\rightarrow$  3 gekoppelte DGls (schwierig).

- Vollständige Lösung einer DGI  $n$ -ter Ordnung enthält  $n$  **unabhängige Konstanten**.  
Vollständige Lösung eines Systems von  $N$  DGIs  $n$ -ter Ordnung enthält  $nN$  **unabhängige Konstanten**.
  - Z.B.  $x(t; A_1, A_2)$  für Newtonsche BGI in 1 Dimension,  $\mathbf{r}(t; A_1, \dots, A_6)$  für Newtonsche BGI in 3 Dimensionen.
  - Konstanten  $A_1, A_2$  unabhängig  $\rightarrow$  Veränderung von  $x$  durch Veränderung von  $A_1$  kann nicht durch Veränderung von  $A_2$  kompensiert werden.
  - Z.B.  $A_1$  und  $A_2$  in  $x = A_1 t + A_2 t$  nicht unabhängig, da Veränderung von  $x$  gemäß  $A_1 \rightarrow A_1 + B$  durch  $A_2 \rightarrow A_2 - B$  kompensiert werden kann.
  - $A_1$  und  $A_2$  in  $x = A_1 + A_2 t$  dagegen unabhängig.
- **Lineare DGI** ist wichtiger Spezialfall,

$$\sum_{k=0}^n f_k(t) \frac{d^k}{dx^k} x(t) = g(t) \quad (87)$$

( $f_k, g$ : vorgegebene Funktionen).

- **Homogene lineare DGI**, falls  $g(t) = 0$ :
  - \* Ist  $x(t)$  eine Lösung, dann auch  $Ax(t)$ .
  - \* Sind  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  Lösungen, dann ist auch  $x_1(t) + x_2(t)$  Lösung.
  - $\rightarrow$  **Superpositionsprinzip**, vollständige Lösung hat die Form
 
$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k x_k(t). \quad (88)$$
    - $x_k(t)$ :  $n$  **linear unabhängige Lösungen**, d.h. kein  $x_j(t)$  kann durch Superposition (= Linearkombination) der anderen  $x_k(t)$  dargestellt werden.
    - Z.B. sind  $x_0 = 1, x_1 = t, x_2 = 3 - 7t$  linear abhängig,  $x_0 = 1, x_1 = t, x_2 = t^2$  dagegen nicht.
    - Vollständige Lösung der DGI kann damit auf einfachere Teilprobleme, das Finden linear unabhängiger  $x_k(t)$  zurückgeführt werden.
- **Inhomogene lineare DGI**, falls  $g(t) \neq 0$ :
  - \* Finde irgendeine Lösung der DGI (= **Partikulärlösung**)  $x_p(t)$ , unbestimmte Konstanten hierbei nicht notwendig.
  - \* Vollständige Lösung ist dann
 
$$x(t) = x_p(t) + \sum_{k=0}^{n-1} A_k x_k(t) \quad (89)$$

( $x_k(t)$ : unabhängige Lösungen der homogenen DGI wie oben).
- **Homogene lineare DGI mit konstanten Koeffizienten**, falls  $f_k(t) = \text{const}, g(t) = 0$ :
  - \* Kann mit Exponentialansatz  $x(t) = Ae^{Bt}$  (siehe Abschnitt 3.3.4) und Superpositionsprinzip vollständig gelöst werden.

- Beispiel: Konstante Kraft,  $m\ddot{x} = F = \text{const}$ ,

$$\rightarrow x = \underbrace{\frac{F}{2m}t^2}_{=x_p(t)} + \underbrace{v_0}_{=A_0} \underbrace{t}_{=x_0(t)} + \underbrace{x_0}_{=A_1} \underbrace{1}_{=x_1(t)} \quad (90)$$

(Abschnitt 3.3.2).

- Beispiel: Lineare Reibungskraft,  $m\ddot{x} = -\beta\dot{x}$ ,

$$\rightarrow x = x_0 + \frac{v_0 m}{\beta} (1 - e^{-(\beta/m)t}) = \underbrace{\left(x_0 + \frac{v_0 m}{\beta}\right)}_{=A_0} \underbrace{1}_{=x_1(t)} + \underbrace{\left(-\frac{v_0 m}{\beta}\right)}_{=A_1} \underbrace{e^{-(\beta/m)t}}_{=x_1(t)} \quad (91)$$

(Abschnitt 3.3.4).

- Beispiel: Harmonischer Oszillator,  $m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx$  (im Folgenden).

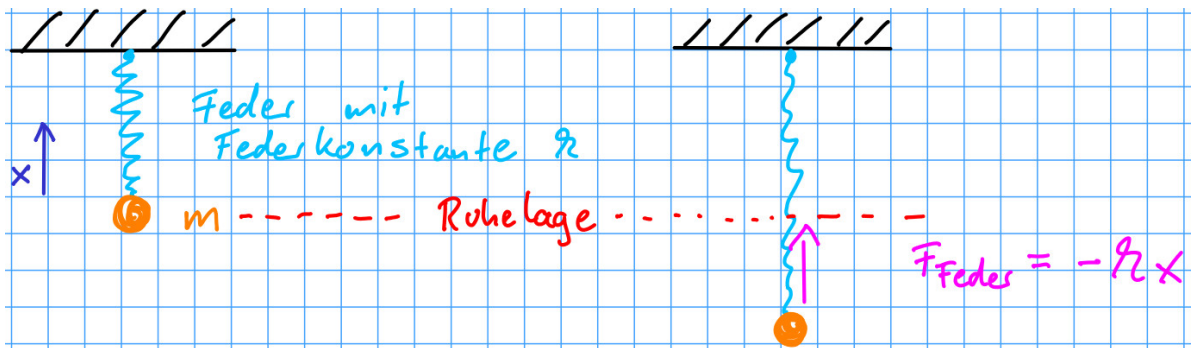
## 4 Harmonischer Oszillator (HO)

- Newtonsche BGl in 1 Dimension:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F(t) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = f(t) \quad (92)$$

$$(\alpha = \beta/2m, \omega_0 = \sqrt{k/m}, f(t) = F(t)/m).$$

- $-kx$ : Lineare rücktreibende Kraft, z.B. Feder, kleine Schwingung um Gleichgewichtslage.



- $-\beta\dot{x}$ : Lineare Reibungskraft.
- $F(t)$ : Äußere anregende Kraft, z.B. regelmäßiges Anstoßen der Feder.

- HO sehr häufig und wichtig, beschreibt z.B.
  - kleine Schwingungen um Gleichgewichtslagen (z.B. Molekülschwingungen in Festkörpern),
  - Materie und fundamentale Kräfte (Quantenfeldtheorie).

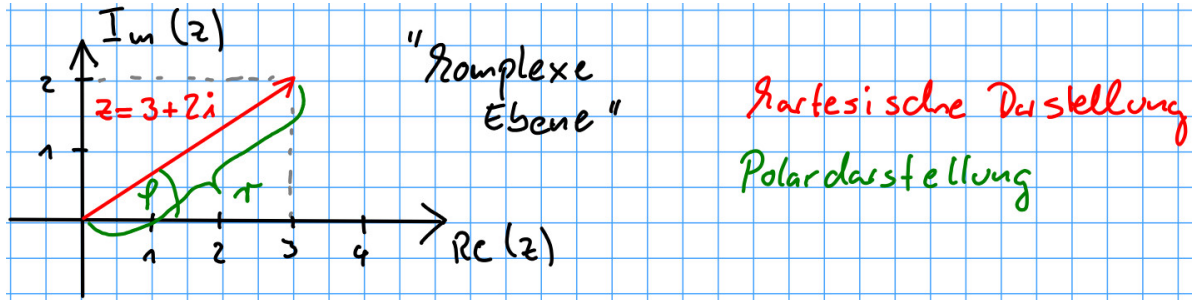
### 4.1 Komplexe Zahlen

- Erlauben z.B. Lösen von Gleichungen, in denen Wurzeln negativer Zahlen auftreten.
- Definition:  $i^2 = -1$  ( $\rightarrow \sqrt{-1} = \pm i$ ).

#### 4.1.1 Kartesische Darstellung

- $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  bzw.  $x = \text{Re}(z)$  (**Realteil**),  $y = \text{Im}(z)$  (**Imaginärteil**).
- **Komplex konjugierte Zahl**:  $z^* = x - iy$ .
- Addition/Subtraktion:  $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ .
- Multiplikation:  $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ .
- **Betrag**:  $|z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

- Division:  $z_1/z_2 = z_1 z_2^*/(z_2 z_2^*) = z_1 z_2^*/|z_2|^2$ .



#### 4.1.2 Polardarstellung

- $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$  (Beweis  $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$  später),  $r, \varphi \in \mathbb{R}$  bzw.  $r = |z|$  (Betrag),  $\varphi = \arg(z)$  (**Argument**, nicht eindeutig,  $\varphi \equiv \varphi + 2\pi$ ).
- Beziehung kartesische Darstellung  $\leftrightarrow$  Polardarstellung:  
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arctan(y/x)$   
 $x = r \cos(\varphi)$ ,  $y = r \sin(\varphi)$ .

\*\*\*\*\* 22. November 2021 (10. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Addition/Subtraktion: Einfacher in kartesischer Darstellung.
- Multiplikation:  $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ .
- Division:  $z_1/z_2 = (r_1/r_2) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ .
- (2-te) Wurzel:  $\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i(\varphi/2 + \pi k)}$ ,  $k = 0, 1$ .
- $n$ -te Wurzel:  $z^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\varphi/n + 2\pi k/n)}$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$ .

#### 4.1.3 Beweis $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$

- Taylor-Reihe von  $\cos(\varphi)$  und  $\sin(\varphi)$ ,

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \varphi^{2k} \quad (93)$$

$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \varphi^{2k+1}. \quad (94)$$

- Taylor-Reihe von  $e^x$ ,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad (95)$$

Ersetzung  $x \rightarrow i\varphi$ ,

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 - i\frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{24}\varphi^4 + \dots = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \varphi^{2k}}_{=\cos(\varphi)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \varphi^{2k+1}}_{=\sin(\varphi)}. \quad (96)$$

- Häufig hilfreich: Ausdrücken von Winkelfunktionen durch komplexe exp-Funktionen, z.B.

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{+i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad , \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{2i}(e^{+i\varphi} - e^{-i\varphi}) \quad (97)$$

(folgt aus  $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ ).

## 4.2 Ungedämpfter HO

- Newtonsche BGl:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (98)$$

- **Lösung durch “scharfes Hinschauen und Überlegen”:**

– Welche Funktion  $x$  ist zweifach abgeleitet  $-x$ ?  
 →  $\cos$  oder  $\sin$ .

– Da  $\cos$  und  $\sin$  linear unabhängig, vollständige Lösung

$$x = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (99)$$

( $A, B$ : Unbestimmte Konstanten, durch ABs festgelegt).

– Alternative Form der vollständigen Lösung:

$$x = C \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (100)$$

(Beziehung zwischen  $A, B$  und  $C, \varphi_0 \rightarrow$  Hausaufgabe).

- **Lösung durch Exponentialansatz** ((98) ist lineare DGl mit konstanten Koeffizienten):

– Ansatz:  $x = e^{\lambda t}$ ,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = e^{\lambda t} (\lambda^2 + \omega_0^2) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm i\omega_0. \quad (101)$$

– Vollständige Lösung:  $x = Ae^{+i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$ , ist aber komplexe Funktion, Trajektorie muss reell sein.

– Realitätsbedingung:

$$\begin{aligned} x &= x^* \\ \rightarrow Ae^{+i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} &= A^* e^{-i\omega_0 t} + B^* e^{+i\omega_0 t} \\ \rightarrow B &= A^*. \end{aligned} \quad (102)$$



- Drücke  $A, B$  durch zwei reelle unbestimmte Konstanten  $a, b$  aus,  $A = a+ib, B = a-ib$ ,  

$$x = (a+ib)e^{+i\omega_0 t} + (a-ib)e^{-i\omega_0 t} = 2a \cos(\omega_0 t) - 2b \sin(\omega_0 t) \quad (103)$$
(äquivalent zu (99)).

\*\*\*\*\* 26. November 2021 (11. Vorlesung) \*\*\*\*\*

### 4.3 Gedämpfter HO

- Newtonsche BGl:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (104)$$

- Lösung durch “scharfes Hinschauen und Überlegen” schwierig.
- Exponentialansatz dagegen geradlinig:  $x = e^{\lambda t}$ ,

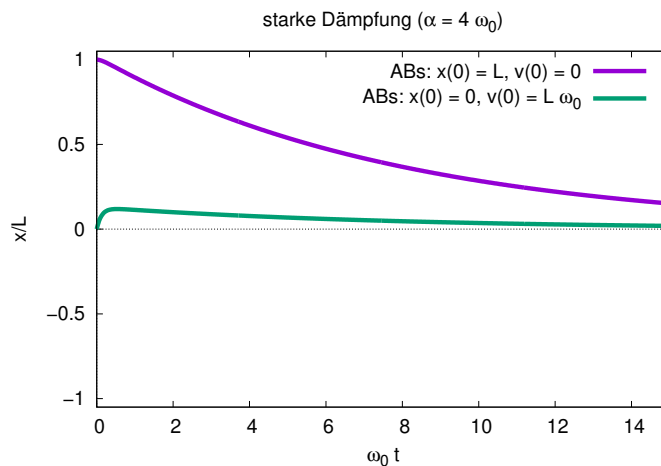
$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x &= e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2) = 0 \\ \rightarrow \lambda &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \end{aligned} \quad (105)$$

- Unterscheide drei Fälle,
  - $\alpha > \omega_0$  (starke Dämpfung) ,
  - $\alpha < \omega_0$  (schwache Dämpfung) ,
  - $\alpha = \omega_0$  (kritische Dämpfung).

#### 4.3.1 Starke Dämpfung ( $\alpha > \omega_0$ )

- Vollständige Lösung:

$$x = Ae^{-(\alpha-\Delta\alpha)t} + Be^{-(\alpha+\Delta\alpha)t}, \quad \Delta\alpha = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}. \quad (106)$$



- Keine Oszillationen.
- $x$  geht exponentiell gegen 0.
- Für große  $t$  dominiert  $Ae^{-(\alpha-\Delta\alpha)t}$ .
- Eventuell ein Nulldurchgang.
- $A, B$  über ABs.

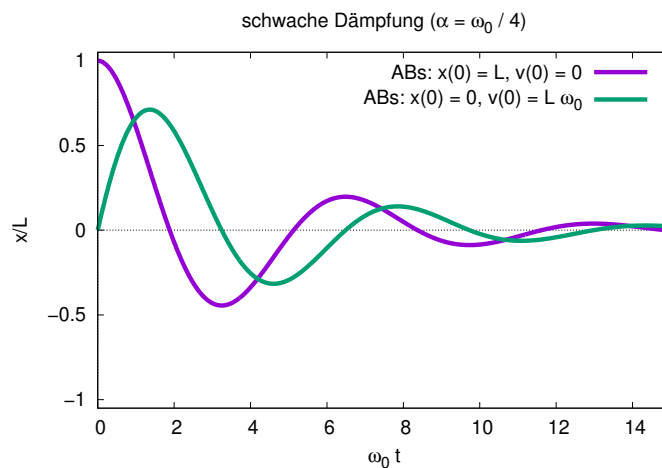
### 4.3.2 Schwache Dämpfung ( $\alpha < \omega_0$ )

- Vollständige komplexe Lösung:

$$x = e^{-\alpha t} (Ae^{+i\omega t} + Be^{-i\omega t}) \quad , \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \in \mathbb{R}. \quad (107)$$

- Vollständige reelle Lösung (Konstruktion wie in Abschnitt 4.2):

$$x = e^{-\alpha t} (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)). \quad (108)$$



- Oszillationen mit Frequenz  $\omega < \omega_0$  innerhalb einer exponentiell abfallenden Einhüllenden.
- $A', B'$  über ABs.

### 4.3.3 Kritische Dämpfung ( $\alpha = \omega_0$ )

- Problem: Exponentialansatz liefert nur eine Lösung,  $e^{\lambda t}$ ,  $\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha$ , keine zwei unabhängigen Lösungen.

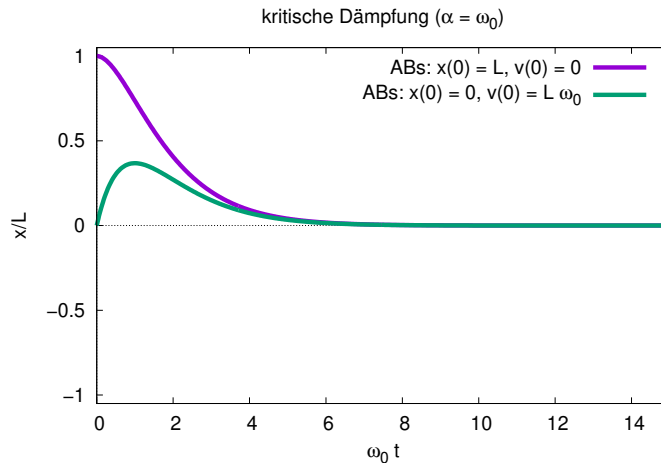
- Betrachte starke Dämpfung für sehr kleine  $\Delta\alpha = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ :

$$\begin{aligned}
 x &= Ae^{-\alpha t}e^{+\Delta\alpha t} + Be^{-\alpha t}e^{-\Delta\alpha t} = \\
 &= Ae^{-\alpha t}\left(1 + \Delta\alpha t + \mathcal{O}(\Delta\alpha^2)\right) + Be^{-\alpha t}\left(1 - \Delta\alpha t + \mathcal{O}(\Delta\alpha^2)\right) = \\
 &= \underbrace{(A+B)}_{=A'}e^{-\alpha t} + \underbrace{(A-B)\Delta\alpha}_{=B'}e^{-\alpha t}t + \mathcal{O}(\Delta\alpha^2).
 \end{aligned}$$

- Vollständige Lösung über  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ :

$$x = A'e^{-\alpha t} + B'e^{-\alpha t}t \quad (109)$$

(kann durch Einsetzen in Newtonsche BGl einfach verifiziert werden).



- Keine Oszillationen.
- $x$  geht exponentiell gegen 0.
- Für große  $t$  dominiert  $B'e^{-\alpha t}t$ .
- Eventuell ein Nulldurchgang.
- $A', B'$  über ABs.
- Technische Bedeutung/Anwendung:  $x$  geht sehr schnell gegen 0, schneller als bei starker Dämpfung.

#### 4.4 Angeregter gedämpfter HO

- Newtonsche BGl:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t). \quad (110)$$

- Inhomogene lineare DGI, d.h. vollständige Lösung ist Summe aus vollständiger Lösung der homogenen DGI (Abschnitt 4.3) und einer beliebigen Partikulärlösung (siehe Abschnitt 3.6).
- Betrachte Spezialfall  $f(t) = f_0 \cos(\Omega t)$  (Man kann jede beliebige Kraft als Summe von cos- und sin-Termen schreiben [**Fourier-Zerlegung**], d.h. Spezialfall entspricht nahezu allgemeinem Fall; Fourier-Zerlegung nicht hier, sondern viel später).
- Löse zunächst komplexe DGI

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\Omega t}. \quad (111)$$

- Ansatz:  $x_p = C e^{i\Omega t}$  (motiviert durch mathematische Struktur der DGI sowie physikalische Erfahrung),

$$\begin{aligned} C \left( -\Omega^2 + 2i\alpha\Omega + \omega_0^2 \right) e^{i\Omega t} &= f_0 e^{i\Omega t} \\ \rightarrow C &= |C| e^{i\arg(C)} = \frac{f_0}{-\Omega^2 + 2i\alpha\Omega + \omega_0^2} = \frac{f_0(-\Omega^2 + \omega_0^2 - 2i\alpha\Omega)}{(-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2} \end{aligned} \quad (112)$$

mit

$$|C| = \frac{|f_0|}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}}, \quad \arg(C) = \operatorname{arccot}\left(\frac{-\Omega^2 + \omega_0^2}{-2\alpha\Omega}\right). \quad (113)$$

\*\*\*\*\* 29. November 2021 (12. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Reelle Partikulärlösung durch Realteilbildung auf beiden Seiten der komplexen DGI,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{d^2}{dt^2}|C|e^{i(\Omega t + \arg(C))} + 2\alpha\frac{d}{dt}|C|e^{i(\Omega t + \arg(C))} + \omega_0^2|C|e^{i(\Omega t + \arg(C))}\right) &= \operatorname{Re}\left(f_0 e^{i\Omega t}\right) \\ \rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\operatorname{Re}\left(|C|e^{i(\Omega t + \arg(C))}\right) + 2\alpha\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\left(|C|e^{i(\Omega t + \arg(C))}\right) + \omega_0^2\operatorname{Re}\left(|C|e^{i(\Omega t + \arg(C))}\right) &= \\ &= f_0 \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (114)$$

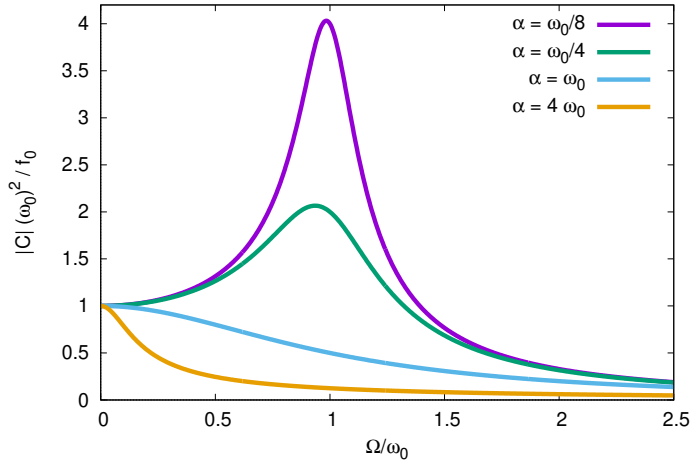
also Partikulärlösung

$$x_p = \operatorname{Re}\left(|C|e^{i(\Omega t + \arg(C))}\right) = |C| \cos(\Omega t + \arg(C)) \quad (115)$$

und vollständige Lösung für z.B. schwache Dämpfung  $\alpha < \omega_0$

$$x = |C| \cos(\Omega t + \arg(C)) + e^{-\alpha t} \left( A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t) \right). \quad (116)$$

- Für große  $t$  dominiert für  $\alpha > 0$  immer Partikulärlösung, da homogene Lösung exponentiell gegen 0 geht.
- **Amplitude:**



- Sehr langsame anregende Kraft  $\Omega \rightarrow 0$ :

$$|C| = |f_0|/\omega_0^2 = |F_0|/k \quad (117)$$

( $f(t) = F(t)/m = F_0 \cos(\Omega t)$ ), entspricht Auslenkung einer Feder bei Kraft  $|F_0|$ .

- Sehr schnelle anregende Kraft  $\Omega \rightarrow \infty$ :

$$|C| \rightarrow |f_0|/\Omega^2 \rightarrow 0, \quad (118)$$

keine Auslenkung, HO kann nicht schnell genug auf anregende Kraft reagieren.

- Verschwindende Reibung  $\alpha = 0$ :

$$|C| = \frac{|f_0|}{|-\Omega^2 + \omega_0^2|}, \quad (119)$$

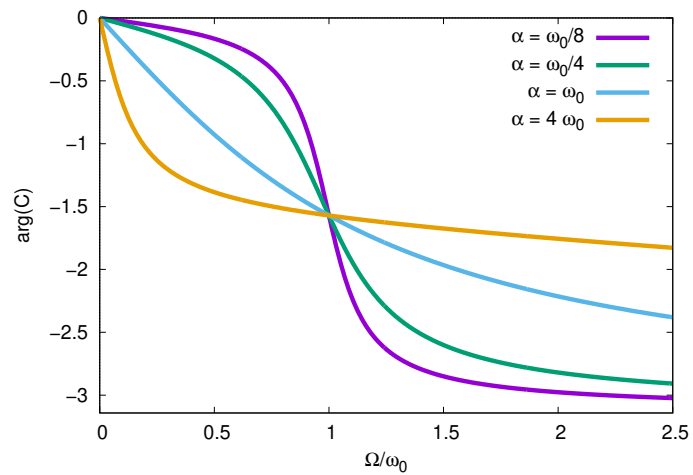
Amplitude wird sehr groß, falls Frequenz der anregenden Kraft ähnlich der Eigenfrequenz des HOs ist, bei  $|\Omega| = \omega_0$  **Resonanzkatastrophe**.

- Maximale Amplitude bei nicht-verschwindender Reibung  $\alpha \neq 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\Omega} \left( (-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2 \right) \Big|_{\Omega=\Omega_{\max}} = \\ &= -4(-\Omega_{\max}^2 + \omega_0^2)\Omega_{\max} + 8\alpha^2 \Omega_{\max} = 4\left(\Omega_{\max}^2 - (\omega_0^2 - 2\alpha^2)\right)\Omega_{\max} \\ \rightarrow \Omega_{\max} &= \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \\ \rightarrow |C|_{\max} &= \dots = \frac{|f_0|}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \quad (120) \end{aligned}$$

( $\Omega_{\max}$ : **Resonanzfrequenz**), d.h. Maximum nur bei nicht zu starker Dämpfung, wächst für schwache Dämpfung  $\propto 1/\alpha$  an.

- **Phase:**



- Betrachte “Vorwärtsschwingung”, d.h.  $\Omega > 0$ , dann aus Zähler der rechten Seite von (112) ersichtlich, dass  $-\pi \leq \arg(C) \leq 0$ , d.h. Schwingung hängt anregender Kraft hinterher.
- Sehr langsame anregende Kraft  $\Omega \rightarrow 0$ :  
 $\arg(C) = 0$ , Schwingung hängt nicht hinterher.
- Sehr schnelle anregende Kraft  $\Omega \rightarrow \infty$ :  
 $\arg(C) \rightarrow -\pi$ , Schwingung hängt maximal hinterher.
- Nahe der Resonanzfrequenz  $\Omega = \omega_0$ :  
 $\arg(C) = -\pi/2$ .

## 5 Kraftfelder, Potentiale, Energieerhaltung

### 5.1 Rein ortsabhängige Kraft in 1 Dimension

- Rein ortsabhängige Kraft:  $F = F(x)$ , aber keine  $\dot{x}$ - oder  $t$ -Abhängigkeit.
- $F(x)$  wird als **Kraftfeld** bezeichnet, d.h. jedem Raumpunkt  $x$  wird Kraft  $F$  zugeordnet.
- Newtonsche BGl:  $m\ddot{x} = F(x)$ .
- Kann durch Multiplikation mit  $\dot{x}$  auf DGl 1. Ordnung reduziert werden:

$$\begin{aligned} m\dot{x}\ddot{x} - F(x)\dot{x} &= 0 \\ \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \underbrace{\left( - \int dx F(x) \right)}_{=V(x)} \right) &= 0 \\ \rightarrow \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) &= E = \text{const.} \end{aligned} \quad (121)$$

\*\*\*\*\* 03. Dezember 2021 (13. Vorlesung) \*\*\*\*\*

–  $V$ :

- \*  $V(x) = - \int dx F(x)$  ist Definition, wird als **Potential** bezeichnet.
- \*  $V$  nicht eindeutig, besitzt frei wählbare Konstante, d.h.  $V(x)$  physikalisch äquivalent zu  $V(x) + V_0$ .
- \* Bei gegebenem Potential erhält man Kraft durch Ableiten:  $F = -dV/dx$ .

–  $E$ :

- \* Rechnung zeigt, dass  $E$  (eine “komplizierte Funktion” von  $x$  und  $\dot{x}$ ) konstant ist.
  - \*  $x$  und  $\dot{x}$  verändern sich,  $E$  bleibt konstant, ist daher **Konstante der Bewegung** bzw. **Erhaltungsgröße**.
  - \* Erhaltungsgrößen spielen zentrale Rolle in Physik, z.B. vereinfacht Kenntnis von Erhaltungsgrößen Lösen der entsprechenden BGls (hier Reduktion von DGl 2. Ordnung auf DGl 1. Ordnung).
  - \* In (121) gefundene Erhaltungsgröße wird als **Energie** bezeichnet.
  - \*  $E = T + V = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$  mit  $T = E_{\text{kin}} = (m/2)\dot{x}^2$  (**kinetische Energie**) und  $V = E_{\text{pot}}$  (**potentielle Energie**),  $T$  und  $V$  sind separat nicht erhalten, d.h. nicht konstant.
- Statt Newtonsche BGl (2. Ordnung) kann (121) (DGl 1. Ordnung) gelöst werden, z.B. mit Trennung der Variablen,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \pm \sqrt{(2/m)(E - V(x))} \\ \rightarrow \int dx \frac{1}{\sqrt{(2/m)(E - V(x))}} &= \pm \int dt = \pm(t - \tilde{t}). \end{aligned} \quad (122)$$

- Beispiel: Konstante Kraft  $-mg$  (1-dimensionale Bewegung im Schwerfeld), d.h. Newtonsche BGl  $m\ddot{z} = -mg$ .

– Potential:

$$V(z) = - \int dz (-mg) = mgz + V_0 \quad (123)$$

(wähle  $V_0 = 0$ ).

– Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \pm(t - \tilde{t}) &= \int dz \frac{1}{\sqrt{(2/m)(E - V(z))}} = \int dz \frac{1}{\sqrt{(2/m)(E - mgz)}} = \\ &= -\sqrt{\frac{2(E - mgz)}{mg^2}} \\ \rightarrow z &= -\frac{g}{2}(t - \tilde{t})^2 + \frac{E}{mg}, \end{aligned} \quad (124)$$

d.h. wie erwartet zwei unbestimmte Konstanten  $E$  (Energie),  $\tilde{t}$  (Zeitpunkt, an dem Massenpunkt seinen höchsten Punkt erreicht); können z.B. in bisher übliche Konstanten  $z_0, v_0$  umgerechnet werden, indem man mit  $z = -(g/2)t^2 + v_0t + z_0$  vergleicht,

$$z = -\frac{g}{2}t^2 + \underbrace{g\tilde{t}}_{=v_0} t + \underbrace{\frac{E}{mg} - \frac{g\tilde{t}^2}{2}}_{=z_0}. \quad (125)$$

- Konsequenzen der **Energieerhaltung** (von  $E = \text{const}$ ):

– Ohne Trajektorie  $x(t)$  zu berechnen, können Eigenschaften der Bewegung abgelesen werden.

– Im Folgenden Beispiel HO,

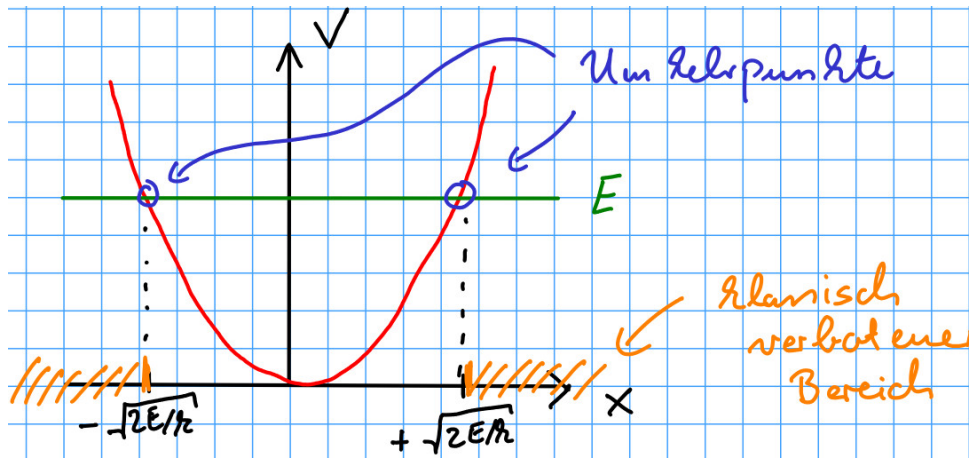
$$F(x) = -kx \quad \rightarrow \quad V(x) = - \int dx (-kx) = \frac{k}{2}x^2 + V_0 \quad (126)$$

(wähle  $V_0 = 0$ ).

– **Umkehrpunkte:**

- \*  $V = E_{\text{pot}} = E, T = E_{\text{kin}} = 0$ , d.h. Energie steckt vollständig in potentieller Energie, Geschwindigkeit  $\dot{x} = 0$ .
- \*  $E = V(x_{\text{Umkehr}}) = kx_{\text{Umkehr}}^2/2$ , also  $x_{\text{Umkehr}} = \pm\sqrt{2E/k}$ .
- \* Bewegungsrichtung kehrt sich um (Ausnahmen bilden Potentiale mit  $-dV(x)/dx|_{x=x_{\text{Umkehr}}} = F(x_{\text{Umkehr}}) = 0$ ).





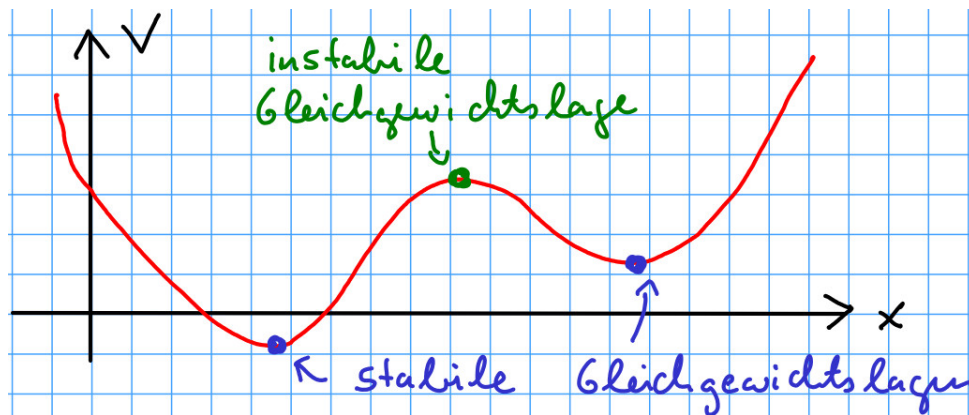
– **Klassisch verbotener Bereich:**

- \* Positionen  $x$  mit  $V(x) > E$ ; Massenpunkt kann nicht dorthin vordringen (würde negative kinetische Energie, d.h.  $T = E_{\text{kin}} = (m/2)v^2 < 0$  erfordern).
- \* In Quantenmechanik möglich (Tunneleffekt).

– Maximale Geschwindigkeit am Minimum des Potentials  $V$ , d.h. beim HO-Beispiel bei  $x = 0$ .

– Geschwindigkeit bei  $x$  über (122) bestimmbar:  $v(x) = \pm\sqrt{(2/m)(E - V(x))}$ .

- **Stabile und instabile Gleichgewichtslagen** (Positionen  $x$  an denen die Summe aller Kräfte verschwindet, d.h.  $-dV(x)/dx = F(x) = 0$  gilt): Minima und Maxima von  $V(x)$ .



• **Arbeit:**

$$dW = dx F \quad \text{bzw.} \quad W_{x_1 \rightarrow x_2} = \int_{x_1}^{x_2} dx F. \quad (127)$$

– Eng verwandt mit Potential  $V(x) = -\int dx F(x)$ :

- \* Um einen Massenpunkt im Kraftfeld  $F$  von  $x_1$  nach  $x_2$  zu verschieben, muss Arbeit  $W = \int_{x_1}^{x_2} dx (-F(x))$  verrichtet werden, Potentialdifferenz  $V(x_2) - V(x_1) = W$ .

- \* Bewegt sich der Massenpunkt von  $x_1$  nach  $x_2$  unter Einfluss des Kraftfelds  $F$ , verrichtet das Kraftfeld Arbeit  $W = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x)$ , Potentialdifferenz  $V(x_1) - V(x_2) = W$ .
- Arbeit kann für beliebige Kräfte  $F(x, \dot{x}, t)$  berechnet werden, also auch solche, die nicht nur von  $x$  abhängen.

\*\*\*\*\* 06. Dezember 2021 (14. Vorlesung) \*\*\*\*\*

## 5.2 Grundlagen der Vektoranalysis

- Verallgemeinerung von Potentialen, Energieerhaltung, Arbeit, etc. auf 3 Dimensionen erfordert Elemente der **Vektoranalysis**.
- Wiki: “Vektoranalysis ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich hauptsächlich mit Vektorfeldern in zwei oder mehr Dimensionen beschäftigt und dadurch die bereits in der Schulmathematik behandelten Gebiete der Differential- und der Integralrechnung wesentlich verallgemeinert. Das Gebiet besteht aus einem Satz von Formeln und Problemlösungstechniken, die zum Rüstzeug von Ingenieuren und Physikern gehören, aber gewöhnlich erst im zweiten oder dritten Semester an den entsprechenden Hochschulen erlernt werden.”
- **Feld**: Ordnet jedem Raumpunkt  $\mathbf{r}$  eine Größe zu.
  - **Skalares Feld**: Ordnet jedem  $\mathbf{r}$  eine Zahl zu, z.B. Potential  $V(\mathbf{r})$ .
  - **Vektorfeld**: Ordnet jedem  $\mathbf{r}$  einen Vektor zu, z.B. rein ortsabhängige Kraft  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ .

### 5.2.1 Ableitungen skalarer Funktionen/Felder

- **Partielle Ableitung**:
  - Ableitung einer Funktion, die von mehreren Variablen abhängt, nach einer ihrer Variablen, wobei die anderen als Konstanten betrachtet werden.
  - Z.B. partielle Ableitung von  $V(x, y, z)$  nach  $x$ :
    - \* Schreibweise:
 
$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} V(\mathbf{r}) = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial x}. \quad (128)$$
    - \* Betrachte  $y, z$  als Konstanten, leite dann wie gewohnt nach  $x$  ab.
  - Beispiele:
 
$$\frac{\partial}{\partial x} x = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x} y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} xy = y,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sin(x^2 y^2) + y^3 + Ae^{xz}) = \cos(x^2 y^2) 2xy^2 + Ae^{xz} z. \quad (129)$$
- Welche Variablen als konstant betrachtet werden ist ebenso wichtig, wie nach welcher Variable partiell abgeleitet wird.
  - \* Ein Punkt in der  $x$ - $y$ -Ebene kann durch verschiedene Koordinatenpaare beschrieben werden, z.B.  $(x, y)$ ,  $(r, \varphi)$ ,  $(x, r)$ , ... (wie üblich  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arctan(y/x)$ ).

\*  $V = x(x^2 + y^2) = xr^2$ .

\* Was ist  $\partial V/\partial x$ ?

\* Wenn  $y$  als konstant betrachtet wird,

$$\frac{\partial}{\partial x}V = 3x^2 + y^2 \quad (\text{präzise Schreibweise } \frac{\partial}{\partial x}V(x, y), \left. \frac{\partial}{\partial x}V \right|_y, \left( \frac{\partial}{\partial x}V \right)_y). \quad (130)$$

\* Wenn  $r$  als konstant betrachtet wird,

$$\frac{\partial}{\partial x}V = x^2 + y^2 \quad (\text{präzise Schreibweise } \frac{\partial}{\partial x}V(x, r), \left. \frac{\partial}{\partial x}V \right|_r, \left( \frac{\partial}{\partial x}V \right)_r). \quad (131)$$

\* Welche Variablen als konstant betrachtet werden, wird in Rechnungen häufig nicht notiert, sollte dann aber aus Kontext ersichtlich sein.

*Ratschlag: Zumindest in nächster Zeit immer präzise Schreibweise verwenden.*

– Partielle Ableitungen sind in der Regel vertauschbar, d.h.

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}V = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}V, \quad (132)$$

z.B.

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\cos(xy) + y^3) = \frac{\partial}{\partial x}(-\sin(xy)x + 3y^2) = -\cos(xy)xy - \sin(xy) \quad (133)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\cos(xy) + y^3) = \frac{\partial}{\partial y}(-\sin(xy)y) = -\cos(xy)xy - \sin(xy). \quad (134)$$

• **Nabla-Operator:**

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (135)$$

• **Gradient:**

$$\text{grad } V = \nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right). \quad (136)$$

– Gradient macht aus skalarer Funktion eine vektorielle Funktion.

– Rechenregeln (folgen aus Definition des Gradienten und bekannten Ableitungsregeln):

\* Summenregel:

$$\nabla(Af(\mathbf{r}) + Bg(\mathbf{r})) = A\nabla f(\mathbf{r}) + B\nabla g(\mathbf{r}). \quad (137)$$

\* Produktregel:

$$\nabla(f(\mathbf{r})g(\mathbf{r})) = (\nabla f(\mathbf{r}))g(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r})(\nabla g(\mathbf{r})). \quad (138)$$

\* Kettenregel:

$$\nabla f(g(\mathbf{r})) = f'(g(\mathbf{r}))\nabla g(\mathbf{r}). \quad (139)$$

• **Verallgemeinerte Kettenregel:**

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{r}(t)) = \frac{d}{dt}V(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (140)$$

(zum Vergleich in 1 Dimension  $(d/dt)V(x(t)) = (dV/dx)dx/dt$ ).

- Für jede Variable von  $V$  ein Term in der Summe.
- Abkürzende Schreibweise mit Hilfe des Gradienten,

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{r}(t)) = (\text{grad } V)\dot{\mathbf{r}} = (\nabla V)\dot{\mathbf{r}}. \quad (141)$$

- **Differential** von  $V$  analog zur verallgemeinerten Kettenregel:

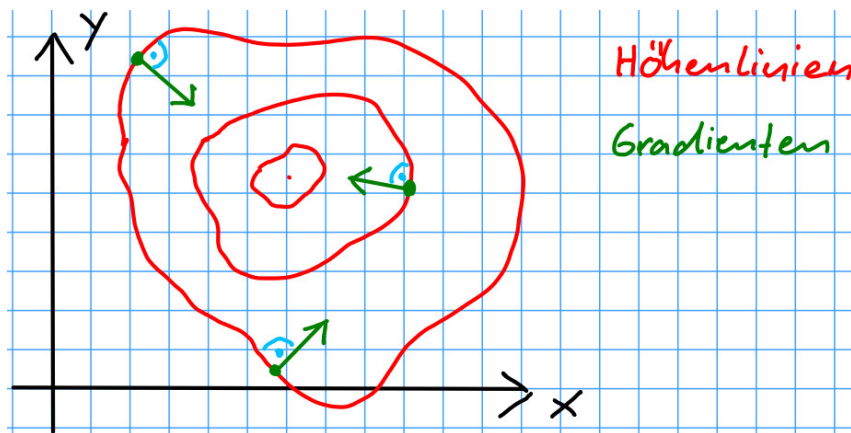
$$dV(\mathbf{r}) = dV(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = (\text{grad } V)d\mathbf{r} = (\nabla V)d\mathbf{r} \quad (142)$$

(zum Vergleich in 1 Dimension  $dV = (dV/dx)dx$ ).

- Bedeutung: "Wie verändert sich  $V$  bei kleiner Veränderung von  $x, y, z$ ?"

- Anschauliche Bedeutung des Gradienten:

- Betrachte Gebirge beschrieben durch  $h(x, y)$  (Grundfläche durch  $(x, y)$  parametrisiert,  $h$  ist Höhe).
- $dh = (\text{grad } h)d\mathbf{r}$  (mit  $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ ).
- Höhenzuwachs maximal positiv, wenn  $d\mathbf{r}$  parallel zum Gradienten  
→  $\text{grad } h$  zeigt an jedem Punkt  $(x, y)$  in Richtung des steilsten Anstiegs.
- Höhenzuwachs maximal negativ (d.h. Höhenverlust), wenn  $d\mathbf{r}$  antiparallel zum Gradienten.
- Kein Höhenzuwachs bzw. -verlust, wenn  $d\mathbf{r}$  senkrecht zum Gradienten  
→ Höhenlinien immer senkrecht zum Gradienten und damit zum steilsten Anstieg.



\*\*\*\*\* 10. Dezember 2021 (15. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- **Richtungsableitung:**

- Steigung einer von mehreren Variablen abhängigen Funktion, z.B.  $V(\mathbf{r})$ , in einer durch einen Vektor vorgegebenen Richtung  $\hat{\mathbf{n}}$  ( $\hat{\mathbf{n}}$  impliziert  $|\hat{\mathbf{n}}| = 1$ ):

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = (\nabla V)\hat{\mathbf{n}}. \quad (143)$$

– Beispiel:

\*  $V(x, y) = x$ .

\* Richtungsableitungen in Richtungen  $x, y$  entsprechen partiellen Ableitungen nach  $x, y$ :

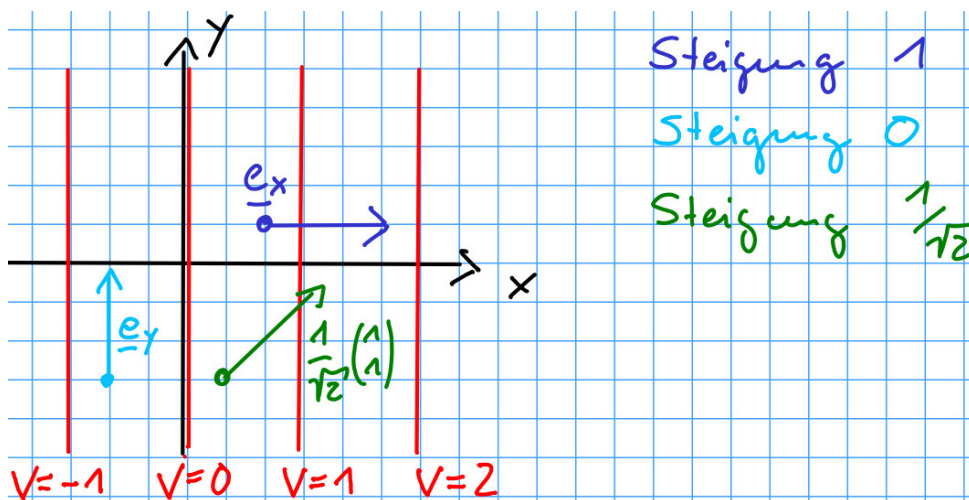
$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}_x} = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x = \frac{\partial V}{\partial x} = 1 \quad (144)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}_y} = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) \mathbf{e}_y = \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (145)$$

\* Richtungsableitung in Richtung  $\hat{\mathbf{n}} = (1, 1)/\sqrt{2}$ :

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (146)$$

(“Es geht in dieser Richtung etwas nach oben, aber nicht so steil, wie in  $x$ -Richtung, also schräges Hinaufsteigen des Abhangs.”).



• Häufig:  $\nabla r, \nabla f(r)$  (mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ):

– Berechne zunächst  $x$ -Komponente von  $\nabla r$ :

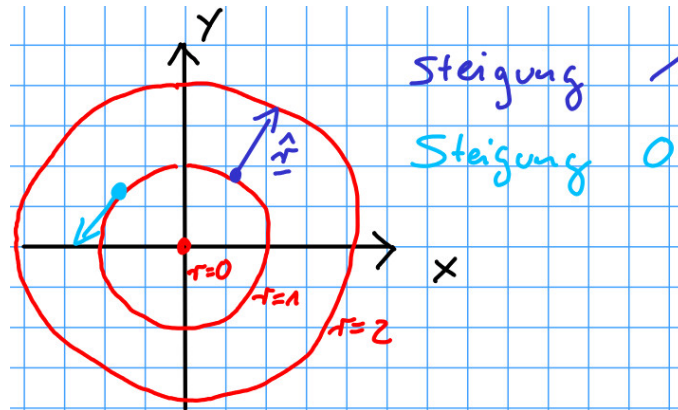
$$(\nabla r)_x = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (147)$$

– Analog  $y$ - und  $z$ -Komponente.

– Damit

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \hat{\mathbf{r}}. \quad (148)$$

– Ergebnis anschaulich klar:  $r$  ist Abstand vom Ursprung, wächst am stärksten in Richtung  $\hat{\mathbf{r}}$ , hat in dieser Richtung Steigung  $(\nabla r)\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} = 1$ .



– Kettenregel (139) liefert

$$\nabla f(r) = \frac{df(r)}{dr} (\nabla r) = \frac{df(r)}{dr} \hat{\mathbf{r}}, \quad (149)$$

z.B.

$$\nabla \frac{1}{r} = \left( -\frac{1}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (150)$$

• Partielle versus **totale Ableitung** von  $V(x(t), t)$ :

– Partielle Ableitungen nach  $x, t$ :

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_t, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_x. \quad (151)$$

– Totale Ableitung nach  $t$  mit verallgemeinerter Kettenregel (140):

$$\frac{dV}{dt} = \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_t \frac{dx}{dt} + \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_x \frac{dt}{dt} = \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_t \dot{x} + \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_x. \quad (152)$$

– Verallgemeinerung auf 3 Dimensionen, d.h.  $V(x(t), t) \rightarrow V(\mathbf{r}(t), t)$ :

$$\frac{dV}{dt} = \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{y,z,t} \dot{x} + \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{x,z,t} \dot{y} + \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{x,y,t} \dot{z} + \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{x,y,z} = (\nabla V) \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (153)$$

## 5.2.2 Ableitungen von vektoriellen Funktionen/Vektorfeldern

• **Divergenz:**

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (154)$$

– Divergenz macht aus einer vektoriellen Funktion eine skalare Funktion.

– Wiki: “Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Skalarfeld, das an jedem Punkt angibt, wie sehr die Vektoren in einer kleinen Umgebung des Punktes auseinanderstreben ... Interpretiert man das Vektorfeld als Strömungsfeld einer Größe, für die die Kontinuitätsgleichung gilt, dann ist die Divergenz die Quelldichte. Senken haben negative Divergenz.”

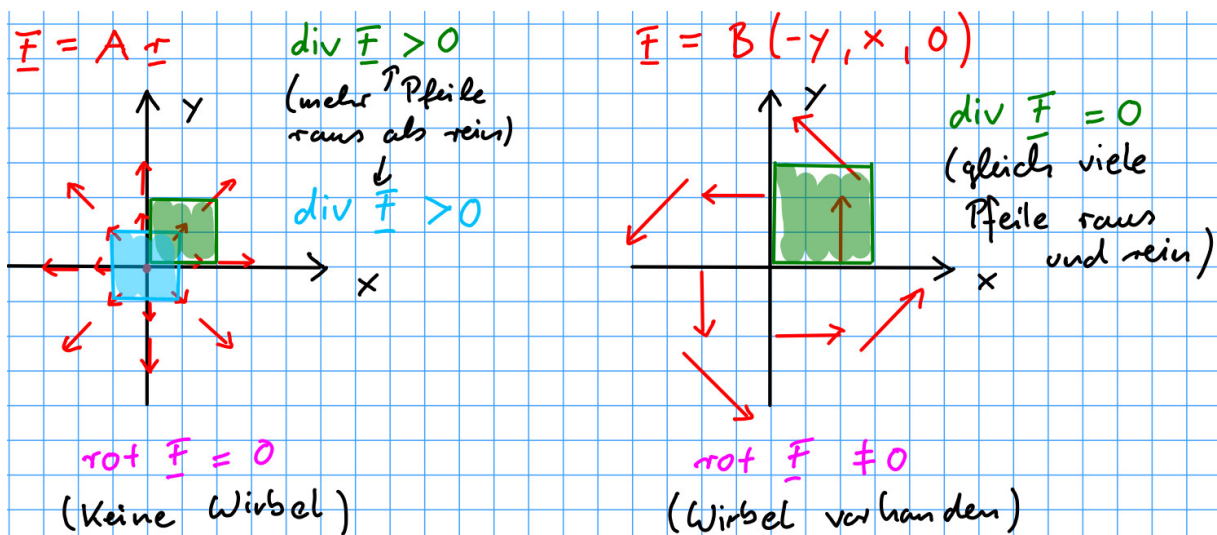
- $\text{div } \mathbf{F} \neq 0$ , wenn "die Länge der in ein Volumenelement hineingehenden Vektorpfeile ungleich der Länge der herausgehenden Vektorpfeile ist",  $\text{div } \mathbf{F} = 0$  sonst.
- Beispiele:

$$* \mathbf{F} = A\mathbf{r} = A(x, y, z),$$

$$\text{div } \mathbf{F} = A \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) = 3A. \quad (155)$$

$$* \mathbf{F} = B(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) = B(-y, +x, 0),$$

$$\text{div } \mathbf{F} = B \left( -\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} \right) = 0. \quad (156)$$



• Rotation:

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right). \quad (157)$$

- Rotation macht aus einer vektoriellen Funktion eine vektorielle Funktion.
- Wiki: "Die Rotation eines Strömungsfeldes gibt für jeden Ort das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit an, mit der sich ein mitschwimmender Körper dreht ..."
- $\text{rot } \mathbf{F} \neq 0$ , wenn Vektorfeld  $\mathbf{F}$  Wirbel besitzt,  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$  sonst.
- Beispiele:

$$* \mathbf{F} = A\mathbf{r} = A(x, y, z),$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = A \left( \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) = 0. \quad (158)$$

$$* \mathbf{F} = B(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) = B(-y, +x, 0),$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = B \left( -\frac{\partial x}{\partial z}, -\frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) = (0, 0, 2B). \quad (159)$$

### 5.2.3 Zweite Ableitungen von Feldern

- Skalare Felder:

- $\nabla\nabla V = \Delta V$  (ergibt skalares Feld):

- \* **Laplace-Operator:**

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (160)$$

- \* Wichtig in der Physik, z.B. Teil von Wellengleichungen (Lichtausbreitung), Teil der Schrödinger-Gleichung (Quantenmechanik), etc.

\*\*\*\*\* 13. Dezember 2021 (16. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- $\nabla \times \nabla V = 0$  (ergibt Nullvektor):

- \* Beweis:

$$\left(\nabla \times \nabla V\right)_j = \underbrace{\epsilon_{jkl} \partial_k \partial_l V}_{=0} = 0. \quad (161)$$

- $\partial_j = \partial/\partial x_j$  (häufige Abkürzung).
      - $\epsilon_{jkl}$ : **Total antisymmetrischer Tensor,  $\epsilon$ -Tensor** (siehe Übungsblatt 1),  $\epsilon_{123} = +1$ ,  $\epsilon$  wechselt Vorzeichen bei Austausch benachbarter Indizes (es folgt z.B.  $\epsilon_{112} = 0$ ,  $\epsilon_{132} = -1$ , etc.).
      - Kreuzprodukt kann in Komponenten mit total antisymmetrischem Tensor geschrieben werden,  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_j = \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} a_k b_l$ .
      - **Einsteinsche Summenkonvention:** Über doppelt auftretende Indizes wird summiert, z.B.  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_j = \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} a_k b_l = \epsilon_{jkl} a_k b_l$ .
      - $\epsilon_{jkl} a_k a_l = (\epsilon_{jkl} a_k a_l + \epsilon_{jlk} a_l a_k)/2 = (\epsilon_{jkl} a_k a_l - \epsilon_{jkl} a_l a_k)/2 = \epsilon_{jkl} (a_k a_l - a_l a_k)/2 = 0$ ; ist Beweis der bekannten Beziehung  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ .

- Vektorfelder:

- $(\nabla\nabla)\mathbf{F} = \Delta\mathbf{F}$  (ergibt Vektorfeld):

- \* Laplace-Operator wirkt separat auf jede Komponente von  $\mathbf{F}$ .

- $\nabla(\nabla\mathbf{F})$  (ergibt Vektorfeld).

- $\nabla(\nabla \times \mathbf{F}) = 0$  (ergibt Null).

- \* Beweis:

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{F}) = \underbrace{\partial_j \epsilon_{jkl} \partial_k F_l}_{=0} = 0. \quad (162)$$

- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla\mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F}$  (ergibt Vektorfeld).

- \* Beweis:

$$\begin{aligned} \left(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})\right)_j &= \epsilon_{jkl} \partial_k \epsilon_{lmn} \partial_m F_n = \epsilon_{ljk} \epsilon_{lmn} \partial_k \partial_m F_n = \\ &= \left(\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}\right) \partial_k \partial_m F_n = \partial_j(\nabla\mathbf{F}) - \Delta F_j. \end{aligned} \quad (163)$$

- $\delta_{jk}$ : **Kronecker- $\delta$** ,  $\delta_{jk} = 1$  falls  $j = k$ ,  $\delta_{jk} = 0$  sonst.
      - $\epsilon_{ljk} \epsilon_{lmn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$  (tritt häufig auf  $\rightarrow$  auswendig lernen).



· Warnung:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

liefert

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{F} \Delta = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}),$$

also falsches Ergebnis; Ursache ist, dass bac-cab Reihenfolge der Vektoren vertauscht, was unzulässig ist, wenn Vektoren Ableitungen enthalten.

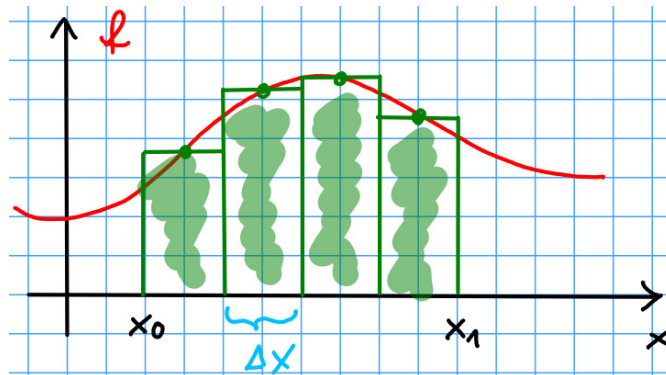
*Ratschlag: Nie mehr bac-cab. Immer in Komponenten mit  $\epsilon_{jkl}$  und  $\delta_{jk}$  rechnen.*

### 5.2.4 Integrale von Funktionen von mehreren Variablen

- Integral in 1 Dimension:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx f(x) \quad \left( \leftarrow \sum_{n=0}^{N-1} \Delta x f(x_0 + (n + 1/2)\Delta x) \text{ mit } \Delta x = (x_1 - x_0)/N \right), \quad (164)$$

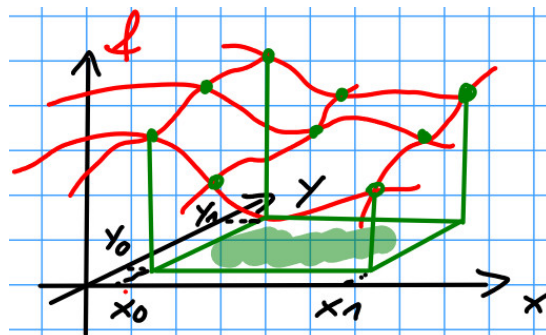
entspricht Fläche zwischen  $x$ -Achse und  $f(x)$  im Intervall  $[x_0, x_1]$ .



- In 2 (oder mehr) Dimensionen, d.h. Integrand  $f(x, y)$  oder  $\mathbf{f}(x, y)$ , mehrere sinnvolle Fragestellungen:

– **Integral über mehrdimensionale Bereiche, „Volumenintegral“:**

“Was ist das Volumen zwischen  $x$ - $y$ -Ebene und  $f(x, y)$  im Bereich  $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ ?”



- \* Integriere erst in  $y$ -Richtung (liefert für jedes  $x$  einen Flächeninhalt  $A(x)$ ), dann in  $x$ -Richtung (“summiert” die Flächeninhalte zu einem Volumen):

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \underbrace{\int_{y_0}^{y_1} dy f(x, y)}_{=A(x)}. \quad (165)$$

- \* Oder umgekehrt, integriere erst in  $x$ -, dann in  $y$ -Richtung, d.h.  $\int dx$  und  $\int dy$  vertauschbar:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy f(x, y) = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} dx f(x, y). \quad (166)$$

- \* Beispiel: Volumen eines Keils,

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy x = \int_0^1 dx xy \Big|_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 dx x = \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}. \quad (167)$$

(nicht schwieriger als Integration in 1 Dimension).

- \* Zusätzliche Schwierigkeiten, bei Verwendung **krummliniger Koordinaten**, z.B.  $(r, \varphi)$  statt  $(x, y)$  (mehr dazu in Kapitel 9).

\*\*\*\*\* 17. Dezember 2021 (17. Vorlesung) \*\*\*\*\*

### – Wegintegral, Kurvenintegral, Linienintegral:

“Was ist die Fläche unter  $f(x, y)$  entlang eines Wegs  $\mathcal{C}$  in der  $x$ - $y$ -Ebene (z.B. beschrieben durch  $\mathbf{r}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda))$ ,  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ )?”

- \* Aufstellen des entsprechenden Integralausdrucks in Anlehnung an (164):

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| \Delta \mathbf{r}(\lambda_0 + (n + 1/2)\Delta\lambda) \right| f(\lambda_0 + (n + 1/2)\Delta\lambda)$$

$$\text{mit } \Delta \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}(\lambda + \Delta\lambda/2) - \mathbf{r}(\lambda - \Delta\lambda/2) \quad , \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{N}$$

$$\rightarrow \int_{\mathcal{C}} |d\mathbf{r}| f(\mathbf{r}). \quad (168)$$

- \* Wie berechnet man dieses Integral?

- Parametrisiere Weg, z.B. wie oben durch  $\mathbf{r}(\lambda)$ .

- Drücke  $|d\mathbf{r}|$  durch  $d\lambda$  aus,

$$|d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \right| d\lambda \quad (169)$$

(Annahme:  $d\lambda > 0$ , d.h.  $\lambda_1 > \lambda_0$ ).

- Integral wird damit zu gewöhnlichem 1-dimensionalen Integral über  $\lambda$ ,

$$\int_{\mathcal{C}} |d\mathbf{r}| f(\mathbf{r}) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \left| \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \right| f(\mathbf{r}(\lambda)), \quad (170)$$

Berechnung wie gewohnt.

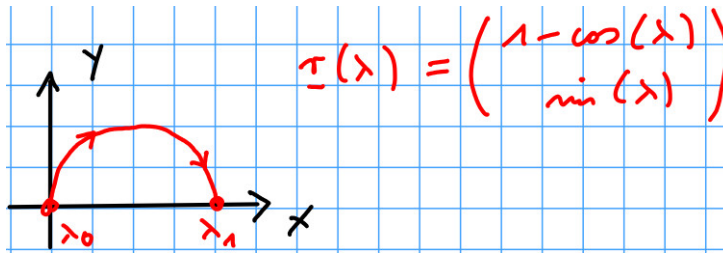
- \* Beispiel: Fläche unter  $f(x, y) = 1$  auf Kreisbogen (ergibt Länge des Wegs, d.h. Länge des Kreisbogens),

$$\mathcal{C} : \mathbf{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq \pi \quad (\text{d.h. Halbkreis}) \quad (171)$$

$$\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} = \begin{pmatrix} \sin(\lambda) \\ \cos(\lambda) \end{pmatrix} \quad (172)$$

$$\left| \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \right| = \sqrt{(\sin(\lambda))^2 + (\cos(\lambda))^2} = 1 \quad (173)$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \left| \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \right| f(\mathbf{r}(\lambda)) = \int_0^{\pi} d\lambda = \pi. \quad (174)$$



– **Wegintegrale vektorwertiger Funktionen:**

- \* Häufig auch Integrale der Form

$$\int_C d\mathbf{r} \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (175)$$

- \* Berechnung erneut durch Parametrisierung des Wegs und Umschreiben in 1-dimensionales Integral,

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \quad (176)$$

$$\int_C d\mathbf{r} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \mathbf{f}(\mathbf{r}(\lambda)). \quad (177)$$

- \* Beispiel im folgenden Abschnitt (Berechnung der Arbeit in 3 Dimensionen,  $dW = d\mathbf{r} \mathbf{F}$ ).

### 5.3 Kraftfelder und Potentiale in 3 Dimensionen

- Übertrage Überlegungen aus Abschnitt 5.1 von 1 Dimension auf 3 Dimensionen.
- Starte wie in 1 Dimension mit rein ortsabhängiger Kraft  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  und Newtonscher BGl  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , dann Multiplikation mit  $\dot{\mathbf{r}}$ :

$$m\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) \right) = 0 \quad (\text{Annahme: es existiert } V(\mathbf{r}) \text{ mit } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}))$$

$$\rightarrow \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) = E = \text{const.} \quad (178)$$

- Nur spezielle Kraftfelder  $\mathbf{F}$  lassen sich gemäß  $\mathbf{F} = -\nabla V$  schreiben (ausführliche Diskussion weiter unten); nur für solche Kraftfelder gilt Energieerhaltung; man bezeichnet sie als **konservative Kraftfelder**.

- Kraft in  $x$ -Richtung ist Ableitung des Potentials  $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$  nach  $x$  bei festgehaltener  $y$ - und  $z$ -Variable.

- Kraft  $\mathbf{F}$  ist negativer Gradient von  $V$ , zeigt also in Richtung des steilsten Abfalls von  $V$ .
- Im Gegensatz zu 1 Dimension ist Trennung der Variablen nicht direkt anwendbar; (178) ist zwar DGl 1. Ordnung, jedoch nicht in einer Funktion  $x(t)$ , sondern in drei Funktionen  $x(t), y(t), z(t)$ .
- Eine der drei gekoppelten DGls 2. Ordnung,  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , kann durch (178), d.h. DGl 1. Ordnung ersetzt werden (jede gefundene Erhaltungsgröße reduziert eine der zu lösenden DGls um eine Ordnung, daher Erhaltungsgrößen sehr wichtig und wertvoll).
- Wann ist ein Kraftfeld  $\mathbf{F}$  konservativ, d.h. kann gemäß  $\mathbf{F} = -\nabla V$  geschrieben werden?

- Kraftfelder der Form  $\mathbf{F} = -\nabla V$  erfüllen in 2 Dimensionen

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x = 0 \quad (179)$$

bzw. in 3 Dimensionen

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = 0. \quad (180)$$

- Beweis durch Einsetzen von  $\mathbf{F} = -\nabla V$ ,

$$\partial_x F_y - \partial_y F_x = \partial_x(-\partial_y V) - \partial_y(-\partial_x V) = 0. \quad (181)$$

- (179) bzw. (180) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend (kann man zeigen).
- (179) bzw. (180) als Kriterien für praktische Zwecke geeignet, d.h. zum Nachprüfen, ob zu  $\mathbf{F}$  ein Potential existiert, also  $\mathbf{F}$  konservativ ist.

\*\*\*\*\* 10. Januar 2022 (18. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Beispiele:

- $\mathbf{F} = A\mathbf{r} = A(x, y, z)$ :

- \*  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$  (siehe Abschnitt 5.2.2), d.h.  $\mathbf{F}$  konservativ.
- \* Zugehöriges Potential:  $V = -Ar^2/2 + V_0$ , erfüllt  $\mathbf{F} = -\nabla V$ .
- \* Energie erhalten,  $T + V = E = \text{const.}$

- $\mathbf{F} = B(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) = B(-y, +x, 0)$ :

- \*  $\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, 2B) \neq 0$  (siehe Abschnitt 5.2.2), d.h.  $\mathbf{F}$  nicht konservativ.
- \* Man kann kein Potential  $V$  finden, das  $\mathbf{F} = -\nabla V$  erfüllt.
- \* Energie nicht erhalten.

- Wie berechnet man  $V$  bei gegebenem konservativem Kraftfeld  $\mathbf{F}$ ? (**Methode 1**)

– Integriere jede der drei Gleichungen  $\mathbf{F} = -\nabla V$ ,

$$V(\mathbf{r}) = V(x, y, z) = - \int dx F_x(x, y, z) + V_{0,x}(y, z) \quad (182)$$

$$V(\mathbf{r}) = V(x, y, z) = - \int dy F_y(x, y, z) + V_{0,y}(x, z) \quad (183)$$

$$V(\mathbf{r}) = V(x, y, z) = - \int dz F_z(x, y, z) + V_{0,z}(x, y) \quad (184)$$

( $V_{0,x}(y, z)$  ist Integrationskonstante bezüglich  $x$ -Integration, d.h. kann von  $y, z$  abhängen, etc.).

– Bestimme Integrationskonstanten  $V_{0,x}(y, z)$ ,  $V_{0,y}(x, z)$ ,  $V_{0,z}(x, y)$  so, dass rechte Seiten von (182), (183), (184) identisch, d.h. Gleichungen konsistent sind.

– Beispielrechnung: Übungsaufgaben.

• Wie berechnet man  $V$  bei gegebenem konservativem Kraftfeld  $\mathbf{F}$ ? (**Methode 2**)

– Bestimme Potential  $V(\mathbf{r})$  über Arbeit, die verrichtet werden muss, um von beliebig wählbarem Startpunkt  $\mathbf{r}_0$  auf beliebigem Weg nach  $\mathbf{r}$  zu laufen.

– Arbeit:

$$dW = -dx F(x) \quad \rightarrow \quad dW = -d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (185)$$

bzw.

$$W_{x_1 \rightarrow x_2} = - \int_{x_1}^{x_2} dx F(x) \quad \rightarrow \quad W_{\mathcal{C}} = - \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (186)$$

( $F(x)$  bzw.  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  bezeichnet das Kraftfeld; die aufzuwendende Kraft für eine Bewegung durch das Kraftfeld ist damit  $-F(x)$  bzw.  $-\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ).

\*  $W_{\mathcal{C}}$ : Verrichtete Arbeit bei zurückgelegtem Weg  $\mathcal{C}$  durch Kraftfeld  $\mathbf{F}$ .

• **Nicht-konservatives Kraftfeld:**

Zwei Wege  $\mathcal{C}_A$  und  $\mathcal{C}_B$ , die beide von  $\mathbf{r}_1$  nach  $\mathbf{r}_2$  führen, können unterschiedliche Arbeit erfordern, d.h. im Allgemeinen  $W_{\mathcal{C}_A} \neq W_{\mathcal{C}_B}$  (Beispiel weiter unten).

• **Konservatives Kraftfeld:**

$W_{\mathcal{C}_A} = W_{\mathcal{C}_B}$ , d.h. Arbeit hängt nur von Start- und Endpunkt  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  ab, nicht aber vom Weg (kann man zeigen, siehe (188) und umgebender Text).

\*  $d\mathbf{r} \mathbf{F} = dx F_x + dy F_y + dz F_z$ , d.h. Skalarprodukt.

• Länge des Wegstücks  $|d\mathbf{r}|$  wird mit senkrechter Projektion der Kraft auf Richtung des Wegstücks  $\hat{d\mathbf{r}}$  multipliziert.

•  $d\mathbf{r}$  parallel zu  $\mathbf{F}$

→ Beitrag zu  $W$  ist Betrag der Kraft  $\times$  Länge des Wegstücks.

•  $d\mathbf{r}$  senkrecht zu  $\mathbf{F}$

→ kein Beitrag zu  $W$ .

\*  $\int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r})$ : Wegintegral.

• Berechnung wie in Abschnitt 5.2.4 durch Parametrisierung des Wegs und Umschreiben in 1-dimensionales Integral,

$$\int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\lambda)). \quad (187)$$

Für konservative Kraftfelder  $\mathbf{F} = -\nabla V$  folgt die oben behauptete Wegunabhängigkeit von  $W_C$ ,

$$W_C = - \int_C d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \underbrace{\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} (-\nabla V)(\mathbf{r}(\lambda))}_{=-(d/d\lambda)V(\mathbf{r}(\lambda))} =$$

$$= V(\mathbf{r}(\lambda_2)) - V(\mathbf{r}(\lambda_1)) = V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1), \quad (188)$$

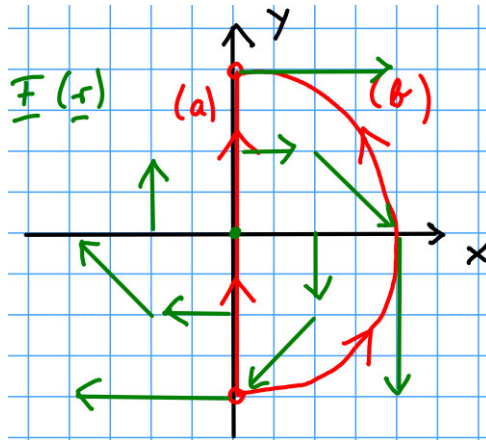
d.h.  $W_C$  hängt nur vom Startpunkt  $\mathbf{r}_1$  und vom Endpunkt  $\mathbf{r}_2$  des Weges  $C$  ab, aber nicht von dessen Verlauf.

### Beispielaufgabe

Welche Arbeit ist bei einer Bewegung entlang der unten genannten Wege von  $\mathbf{r}_1 = (0, -R)$  nach  $\mathbf{r}_2 = (0, +R)$  durch das Kraftfeld  $\mathbf{F} = f(r)(+\sin(\varphi), -\cos(\varphi))$  zu verrichten? (Wie üblich  $x = r \cos(\varphi)$ ,  $y = r \sin(\varphi)$ .)

(a) Gerader Weg.

(b) Kreisförmiger Weg um den Ursprung mit Radius  $R$  gegen den Uhrzeigersinn.



• Lösung durch Nachdenken:

– (a):

Wegrichtung stets senkrecht zur aufzuwendenden Kraft  $-\mathbf{F}$ , daher kein Beitrag zur Arbeit,  $W_a = 0$ .

– (b):

Wegrichtung stets parallel zur aufzuwendenden Kraft  $-\mathbf{F}$ , senkrechte Projektion der Kraft auf Wegrichtung  $f(R) = \text{const}$ , Weglänge  $\pi R$ , daher  $W_b = \pi R f(R)$ .

• Lösung durch Wegintegration:

– (a):

\* Parametrisierung des Wegs:  $\mathbf{r}(\lambda) = (0, \lambda - R)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 2R$ .

\* Wevelement:

$$d\mathbf{r} = d\lambda \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} = d\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (189)$$

\* Wegintegral:

$$W_a = - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\lambda)) = - \int_0^{2R} d\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(r) \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (190)$$

– (b):

\* Parametrisierung des Wegs:  $\mathbf{r}(\lambda) = R(\cos(\lambda), \sin(\lambda))$ ,  $-\pi/2 \leq \lambda \leq +\pi/2$ .

\* Wegelement:

$$d\mathbf{r} = d\lambda \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} = d\lambda R \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \\ +\cos(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (191)$$

\* Wegintegral:

$$\begin{aligned} W_b &= - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\lambda)) = \\ &= - \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\lambda R \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \\ +\cos(\lambda) \end{pmatrix} f(R) \begin{pmatrix} +\sin(\lambda) \\ -\cos(\lambda) \end{pmatrix} = \\ &= Rf(R) \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\lambda = \pi Rf(R). \end{aligned} \quad (192)$$

- Zeigt obige Behauptung, dass Arbeit i.A. nicht nur vom Start- und Endpunkt abhängt, sondern auch vom gewählten Weg.

– Potential damit über Wegintegral berechenbar,

$$V(\mathbf{r}) = W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}} = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (193)$$

( $\mathbf{r}_0$  beliebig, Veränderung von  $\mathbf{r}_0$  verändert  $V$  lediglich um eine Konstante).

\*\*\*\*\* 14. Januar 2022 (19. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Drei äquivalente Charakterisierungen konservativer Kraftfelder:

(1)  $\mathbf{F}$  ist ein Gradientenfeld, d.h. kann gemäß  $\mathbf{F} = -\nabla V$  geschrieben werden.

(2) Für beliebige geschlossene Wege  $\mathcal{C}$  gilt

$$- \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad (194)$$

(Arbeit damit offensichtlich wegunabhängig; für praktische Zwecke, d.h. zum Prüfen, ob  $\mathbf{F}$  konservativ ist, ungeeignet).

(3)  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$  (erlaubt einfaches Prüfen, ob  $\mathbf{F}$  konservativ ist).

– In 1 Dimension ist  $F = F(x)$  ausreichend, d.h. jede rein ortsabhängige Kraft ist ein konservatives Kraftfeld.

## 6 Vielteilchensysteme

- Bisher Dynamik eines Massenpunkts  
→ äußere Kräfte.
- Nun Dynamik mehrerer Massenpunkte (= Teilchen)  
→ äußere Kräfte und Kräfte zwischen Teilchen.
- Newtonsche BGLs für  $N$  Teilchen:

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}_j + \sum_{k \ (k \neq j)} \mathbf{F}_{k \rightarrow j}. \quad (195)$$

- $j, k = 1, \dots, N$ : Teilchenindizes.
- $m_j$ : Masse  $j$ -tes Teilchen.
- $\mathbf{r}_j$ : Trajektorie  $j$ -tes Teilchen.
- $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{r}_j, \dot{\mathbf{r}}_j, t)$ : Äußere Kräfte auf  $j$ -tes Teilchen.
- $\sum_{k \ (k \neq j)}$ : Summe über alle  $k$  mit Ausnahme von  $k = j$ .
- $\mathbf{F}_{k \rightarrow j} = F_{kj}(r_{kj}) \hat{\mathbf{r}}_{k \rightarrow j}$ : Kraft von Teilchen  $k$  auf Teilchen  $j$ , wobei
 
$$F_{kj}(r) = F_{jk}(r),$$

$$\mathbf{r}_{k \rightarrow j} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k,$$

$$r_{kj} = r_{jk} = |\mathbf{r}_{k \rightarrow j}|,$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{k \rightarrow j} = \mathbf{r}_{k \rightarrow j} / r_{kj},$$

d.h. Kräfte zwischen zwei Teilchen wirken entlang ihrer Verbindungslinie, repulsiv wenn  $F_{kj} > 0$ , attraktiv wenn  $F_{kj} < 0$ .

\*  $\mathbf{F}_{k \rightarrow j} = -\mathbf{F}_{j \rightarrow k}$ , d.h. 3. Newtonsches Axiom erfüllt.

\* Beispiel: Gravitationskraft,

$$\mathbf{F}_{k \rightarrow j} = -\frac{Gm_k m_j}{r_{kj}^2} \hat{\mathbf{r}}_{k \rightarrow j}. \quad (196)$$

- In 3 Dimensionen  $3N$  gekoppelte DGLs 2. Ordnung für  $3N$  Funktionen  $\mathbf{r}_j(t)$   
→ i.A. sehr schwierig zu lösen.
  - $N = 2$ :  
Falls keine äußeren Kräfte, d.h.  $\mathbf{F}_j = 0$ , Reduktion auf 1-Teilchenproblem möglich (z.B. Bewegung zweier Himmelskörper [Sonne, Planet]), siehe Abschnitt 6.5.
  - $N \geq 3$ :  
In der Regel analytische Lösung nicht möglich (z.B. Sonne und zwei Planeten), häufig gewisse analytische Vereinfachungen, dann Numerik oder Näherungen erforderlich.

### 6.1 Erhaltung der Gesamtenergie

- Voraussetzung: Äußere Kräfte  $\mathbf{F}_j$  sind konservative Kraftfelder, d.h. es existiert  $V_j(\mathbf{r}_j)$  mit  $\mathbf{F}_j(\mathbf{r}_j) = -\nabla^{(\mathbf{r}_j)} V_j(\mathbf{r}_j)$  (Notation:  $\nabla^{(\mathbf{a})} = (\partial/\partial a_1, \partial/\partial a_2, \dots)$ ).



- Kräfte zwischen Teilchen  $\mathbf{F}_{k \rightarrow j}$  können als Gradienten skalarer Funktionen

$$V_{kj}(r_{kj}) = - \int dr_{kj} F_{kj}(r_{kj}) \quad (197)$$

geschrieben werden,

$$-\nabla^{(\mathbf{r}_j)} V_{kj}(r_{kj}) = - \frac{dV_{kj}(r_{kj})}{dr_{kj}} (\nabla^{(\mathbf{r}_j)} r_{kj}) = F_{kj}(r_{kj}) \hat{\mathbf{r}}_{k \rightarrow j} = \mathbf{F}_{k \rightarrow j} \quad (198)$$

(hier wurden sehr ähnliche Rechenschritte wie in (147) bis (149) verwendet).

- Multiplikation der Newtonschen BGLs (195) mit  $\dot{\mathbf{r}}_j$  und Summation  $\sum_j$  liefert Erhaltung der Gesamtenergie,

$$\begin{aligned} \sum_j \left( m_j \dot{\mathbf{r}}_j \ddot{\mathbf{r}}_j - \underbrace{\mathbf{F}_j(\mathbf{r}_j)}_{= -\nabla^{(\mathbf{r}_j)} V_j(\mathbf{r}_j)} \dot{\mathbf{r}}_j - \sum_{k (k \neq j)} \underbrace{\mathbf{F}_{k \rightarrow j}}_{= -\nabla^{(\mathbf{r}_j)} V_{kj}(r_{kj})} \dot{\mathbf{r}}_j \right) &= 0 \\ \rightarrow \sum_j \left( m_j \dot{\mathbf{r}}_j \ddot{\mathbf{r}}_j + \nabla^{(\mathbf{r}_j)} V_j(\mathbf{r}_j) \dot{\mathbf{r}}_j \right) + \sum_{j \neq k} \nabla^{(\mathbf{r}_j)} V_{kj}(r_{kj}) \dot{\mathbf{r}}_j &= 0 \\ \rightarrow \sum_j \left( m_j \dot{\mathbf{r}}_j \ddot{\mathbf{r}}_j + \nabla^{(\mathbf{r}_j)} V_j(\mathbf{r}_j) \dot{\mathbf{r}}_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \left( \nabla^{(\mathbf{r}_j)} V_{kj}(r_{kj}) \dot{\mathbf{r}}_j + \nabla^{(\mathbf{r}_k)} V_{jk}(r_{jk}) \dot{\mathbf{r}}_k \right) &= 0 \\ \rightarrow \sum_j \left( m_j \dot{\mathbf{r}}_j \ddot{\mathbf{r}}_j + \nabla^{(\mathbf{r}_j)} V_j(\mathbf{r}_j) \dot{\mathbf{r}}_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \left( \nabla^{(\mathbf{r}_j)} V_{kj}(r_{kj}) \dot{\mathbf{r}}_j + \nabla^{(\mathbf{r}_k)} V_{kj}(r_{kj}) \dot{\mathbf{r}}_k \right) &= 0 \\ \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \sum_j \left( \frac{m_j}{2} \dot{\mathbf{r}}_j^2 + V_j(\mathbf{r}_j) \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} V_{kj}(r_{kj}) \right) &= 0 \\ \rightarrow \underbrace{\sum_j \left( \frac{m_j}{2} \dot{\mathbf{r}}_j^2 + V_j(\mathbf{r}_j) \right)}_{1\text{-Teilchenenergien}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j \neq k} V_{kj}(r_{kj})}_{2\text{-Teilchenpotentiale}} &= E = \text{const.} \end{aligned} \quad (199)$$

–  $\sum_{j \neq k}$ : Summe über alle  $j$  und alle  $k$  bis auf  $j = k$ .

–  $E$  ist Summe über 1-Teilchenenergien und Potentiale  $V_{kj}$ , die Wechselwirkungen (WWs) zwischen Teilchen beschreiben, daher Interpretation von  $E$  als **Gesamtenergie**.

\*\*\*\*\* 17. Januar 2022 (20. Vorlesung) \*\*\*\*\*

## 6.2 Impuls und Drehimpuls eines Teilchens

- **Impuls:**  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ .

– Groß, wenn Masse und/oder Geschwindigkeit groß.

– Newtonsche BGL:  $m\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = -\nabla V$ .

- $p_x$  Erhaltungsgröße, wenn  $F_x = 0$  bzw.  $V$  in  $x$ -Richtung konstant, d.h. wenn **Translationssymmetrie** in  $x$ -Richtung vorliegt (analog  $p_y, p_z$ ).
- Erhaltungsgrößen stets mit Symmetrien verbunden (hier Impulserhaltung  $\leftrightarrow$  Translationssymmetrie); sehr wichtig in theoretischer Physik (mehr im 2. Semester: Noether-Theorem, ...).

- **Drehimpuls** bezüglich  $\mathbf{r}_0$ :  $\mathbf{l} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \dot{\mathbf{r}}$ .

- Meist und auch im Folgenden  $\mathbf{r}_0 = 0$ , d.h. Drehimpuls bezüglich des Ursprungs.
- Groß, wenn Impuls groß und/oder Bewegung weit entfernt und überwiegend tangential an Kreis um Ursprung.
- Es gilt

$$\dot{\mathbf{l}} = \underbrace{m \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_{=0} + m \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (200)$$

- $\mathbf{l}$  Erhaltungsgröße (genauer 3 Erhaltungsgrößen), wenn  $\mathbf{F}$  parallel zu  $\mathbf{r}$  bzw.  $V$  radial-symmetrisch, d.h.  $V = V(r)$ , d.h. **Rotationssymmetrie** vorliegt. (Nebenrechnung:  $\mathbf{F} = -\nabla V(r) = -(dV(r)/dr)\hat{\mathbf{r}}$ .)
- Erhaltungsgrößen stets mit Symmetrien verbunden (hier Drehimpulserhaltung  $\leftrightarrow$  Rotationssymmetrie).

### 6.3 Erhaltung des Gesamtimpulses, Schwerpunktbewegung

- **Gesamtmasse:**

$$M = \sum_j m_j. \quad (201)$$

- **Schwerpunkt:**

$$\mathbf{R} = \sum_j \frac{m_j}{M} \mathbf{r}_j \quad (202)$$

(Position des  $j$ -ten Massenpunkts wird mit  $m_j/M$  gewichtet).

- **Gesamtimpuls:**

$$\mathbf{P} = \sum_j \mathbf{p}_j = \sum_j m_j \dot{\mathbf{r}}_j = M \frac{d}{dt} \sum_j \frac{m_j}{M} \mathbf{r}_j = M \dot{\mathbf{R}} \quad (203)$$

( $\mathbf{p}_j = m_j \dot{\mathbf{r}}_j$ : Impuls  $j$ -tes Teilchen).

- BGl des Schwerpunkts durch Summation über Newtonsche BGLs (195):

- Linke Seite:

$$\sum_j m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = M \ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{P}} \quad (204)$$

((203) wurde verwendet).

– Rechte Seite:

$$\sum_j \mathbf{F}_j + \underbrace{\sum_{j \neq k} \mathbf{F}_{k \rightarrow j}}_{=0} = \sum_j \mathbf{F}_j \quad (205)$$

( $\mathbf{F}_{k \rightarrow j} = -\mathbf{F}_{j \rightarrow k}$  wurde verwendet).

– Insgesamt:

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{P}} = \sum_j \mathbf{F}_j. \quad (206)$$

- \* Veränderung des Gesamtimpulses nur durch äußere Kräfte.
- \* Kräfte zwischen Massenpunkten spielen keine Rolle für Schwerpunktbewegung.
- \* Schwerpunkt verhält sich wie Massenpunkt der Masse  $M$  auf den Summe aller äußeren Kräfte wirkt.

- Spezialfall  $\mathbf{F}_j = 0$ , d.h. keine äußeren Kräfte (**abgeschlossenes System**):  $M\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{P}} = 0$ .

– Gesamtimpuls  $\mathbf{P}$  (eine Funktion aller  $\dot{\mathbf{r}}_j$ ) erhalten; in 3 Dimensionen 3 Erhaltungsgrößen.

– Schwerpunktbewegung einfach berechenbar (verhält sich wie freies Teilchen):

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}_0 t + \mathbf{R}_0, \quad (207)$$

d.h. Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{V}_0$ .

– Erneut Hinweis auf Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen (hier Gesamtimpuls  $\mathbf{P}$ ) und Vereinfachung der zu lösenden BGLs (hier Teilproblem Schwerpunktbewegung gelöst).

## 6.4 Erhaltung des Gesamtdrehimpulses

- **Gesamtdrehimpuls:**

$$\mathbf{L} = \sum_j \mathbf{l}_j = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times \dot{\mathbf{r}}_j. \quad (208)$$

- Veränderung des Gesamtdrehimpulses nur durch äußere Kräfte,

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_j \dot{\mathbf{l}}_j = \sum_j \mathbf{r}_j \times \left( \mathbf{F}_j + \sum_{k (k \neq j)} \mathbf{F}_{k \rightarrow j} \right) = \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j, \quad (209)$$

wobei (195), (200) und

$$\begin{aligned} \sum_j \mathbf{r}_j \times \sum_{k (k \neq j)} \mathbf{F}_{k \rightarrow j} &= \sum_{j \neq k} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{k \rightarrow j} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \left( \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{k \rightarrow j} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{j \rightarrow k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \left( \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{k \rightarrow j} - \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{k \rightarrow j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \underbrace{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{k \rightarrow j}}_{\propto (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)} = 0 \end{aligned} \quad (210)$$

verwendet wurde.

- Spezialfall  $\mathbf{F}_j = 0$ , d.h. keine äußeren Kräfte (abgeschlossenes System):  $\dot{\mathbf{L}} = 0$ .
  - Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{L}$  (eine Funktion aller  $\mathbf{r}_j$  und  $\dot{\mathbf{r}}_j$ ) erhalten; in 3 Dimensionen 3 Erhaltungsgrößen.

\*\*\*\*\* 21. Januar 2022 (21. Vorlesung) \*\*\*\*\*

## 6.5 Schwerpunkt- und Relativkoordinaten beim abgeschlossenen 2-Teilchensystem

- Betrachte 2 Teilchen, keine äußeren Kräfte, z.B.
  - Sonne und Planet, WW über Gravitation (siehe Kapitel 8),
  - Wasserstoffatom, d.h. Proton und Elektron, WW über elektromagnetische Kraft,
 ein häufig auftretendes Problem.

- Newtonsche BGLs:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \quad , \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}. \quad (211)$$

- Lösung dieser sechs gekoppelten DGls 2. Ordnung durch Übergang zu Schwerpunkt- und Relativkoordinaten,

$$\mathbf{R} = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_2 \quad , \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (212)$$

(Gesamtmasse  $M = m_1 + m_2$ ); inverse Beziehung durch Auflösen nach  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}. \quad (213)$$

- BGL der Schwerpunktkoordinate: Einsetzen von (211) in (212) bzw. Abschnitt 6.3,

$$M \ddot{\mathbf{R}} = 0. \quad (214)$$

– Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit,  $\mathbf{R} = \mathbf{V}_0 t + \mathbf{R}_0$ .

- BGL der Relativkoordinate: Einsetzen von (211) in (212),

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} - \frac{1}{m_2} \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{m_1} \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} + \frac{1}{m_2} \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}_{=1/\mu} \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \rightarrow \mu \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = F_{21}(|\mathbf{r}|) \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (215)$$

(reduzierte Masse  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ).

- BGL (214) hängt nur von  $\mathbf{R}$ , nicht aber von  $\mathbf{r}$  ab.  
BGL (215) hängt nur von  $\mathbf{r}$ , nicht aber von  $\mathbf{R}$  ab.

- Gekoppelte Newtonsche BGLs (211) durch Übergang zu Schwerpunkt- und Relativkoordinaten entkoppelt, d.h. zwei unabhängige 1-Teilchenprobleme für  $\mathbf{R}$  (BGL (214), Lösung trivial) und  $\mathbf{r}$  (BGL (215), Lösung evtl. schwierig, aber leichter als Lösung der gekoppelten BGLs (211)).
- BGL der Relativkoordinate sieht aus wie Newtonsche BGL für ein Teilchen der Masse  $\mu$  unter Einfluss der Kraft  $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ ; alles bisher für 1-Teilchenprobleme Gelernte darf zur Lösung verwendet werden, z.B.
  - \* Energieerhaltung (da sich  $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$  als Gradient schreiben lässt; siehe Abschnitt 6.1),
  - \* Drehimpulserhaltung (da  $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$  parallel zu  $\mathbf{r}$ ; siehe Abschnitt 6.2).
- Nutze Drehimpulserhaltung zur Reduktion von 3 auf 2 Dimensionen:
  - \* Wähle Koordinatensystem so, dass  $\mathbf{l} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = (0, 0, l) = \text{const}$ , also konstanter Drehimpuls in  $z$ -Richtung zeigt.
  - $\mathbf{r}$  (und auch  $\dot{\mathbf{r}}$ ) liegen stets in  $x$ - $y$ -Ebene, d.h.  $z = 0$ .
  - $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ , d.h. (215) kann von drei auf zwei Gleichungen reduziert werden.
  - Erneut erlaubt Erhaltungsgröße Vereinfachung der zu lösenden BGLs.

## 7 Krummlinige Koordinatensysteme

- Koordinatenwahl nicht auf **kartestische Koordinaten**  $(x, y)$  bzw.  $(x, y, z)$  beschränkt.
- Z.B. auch Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  möglich.
- Physik unabhängig von der Koordinatenwahl.
- Mathematik in manchen Koordinatensystemen einfach, in anderen deutlich schwieriger.  
→ Zu Beginn einer Rechnung über Koordinatenwahl nachdenken.
- Insbesondere für rotationssymmetrische Probleme/Potentiale sind folgende Koordinatensysteme häufig zweckmäßig:
  - **Polarkoordinaten**  $(r, \varphi)$ .
  - **Zylinderkoordinaten**  $(r, \varphi, z)$ .
  - **Kugelkoordinaten**  $(r, \vartheta, \varphi)$ .

### 7.1 Polarkoordinaten

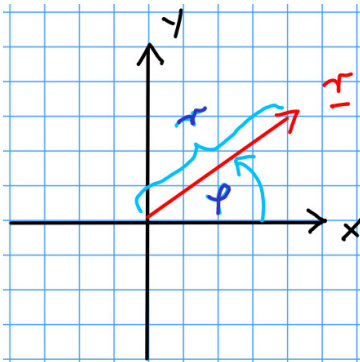
- Definition:

$$\mathbf{r} = (x, y) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \quad (216)$$

$(r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi))$  bzw.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \varphi = \arctan(y/x) \quad (217)$$

( $r$ -Koordinatenlinien  $\mathbf{r}(r, \varphi = \text{const})$  und  $\varphi$ -Koordinatenlinien  $\mathbf{r}(r = \text{const}, \varphi)$  nicht parallel zueinander bzw. gekrümmt, daher Bezeichnung **krummliniges Koordinatensystem**).



\*\*\*\*\* 24. Januar 2022 (22. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Basisvektoren:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial r}{|\partial \mathbf{r} / \partial r|} = \begin{pmatrix} +\cos(\varphi) \\ +\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \varphi}{|\partial \mathbf{r} / \partial \varphi|} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ +\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (218)$$

( $\mathbf{e}_r$  Tangente an  $r$ -Koordinatenlinie,  $\mathbf{e}_\varphi$  Tangente an  $\varphi$ -Koordinatenlinie).

- $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$  orthonormal, d.h. senkrecht und normiert.
- $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$  sind positionsabhängig (im Gegensatz zu konstanten kartesischen Basisvektoren  $\mathbf{e}_x = (1, 0), \mathbf{e}_y = (0, 1)$ ).
- Wenn  $\varphi$  zeitabhängig, dann auch  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$  zeitabhängig,

$$\dot{\mathbf{e}}_r = +\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r. \quad (219)$$

- Ort:  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ .
- Geschwindigkeit:  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$ .

- Kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2). \quad (220)$$

- Drehimpuls:

$$l = \left( m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \right)_z = \left( m r \mathbf{e}_r \times \left( \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \right) \right)_z = \left( m r^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_z \right)_z = m r^2 \dot{\varphi} \quad (221)$$

( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$  sind als 3-dimensionale Vektoren mit  $z$ -Komponente 0 zu verstehen, dann  $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r = 0$  und  $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z$ ).

- Falls Drehimpuls erhalten, d.h.  $l = \text{const}$  (z.B. wenn Potential radialsymmetrisch, d.h.  $V = V(r)$ ), kann kinetische Energie ausschließlich durch  $r$  und  $\dot{r}$  ausgedrückt werden,

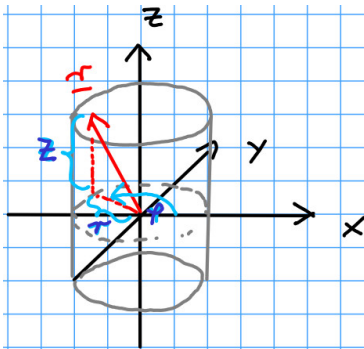
$$T = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2}. \quad (222)$$

## 7.2 Zylinderkoordinaten

- Definition:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) \quad (223)$$

( $r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi), z \in (-\infty, +\infty)$ ).



- Kinetische Energie:

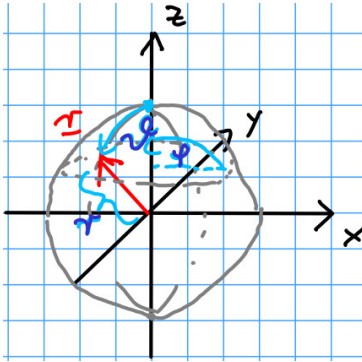
$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \quad (224)$$

### 7.3 Kugelkoordinaten

- Definition:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), r \cos(\vartheta)) \quad (225)$$

$$(r \in [0, \infty), \vartheta \in [0, \pi), \varphi \in [0, 2\pi)).$$



- Kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + (r \sin(\vartheta))^2 \dot{\varphi}^2). \quad (226)$$



## 8 Kepler-Problem

- Bewegung zweier Himmelskörper (Massen  $m_1, m_2$ , Trajektorien  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ), gegenseitige gravitative Anziehung, keine äußeren Kräfte.
- Newtonsche BGLs:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (227)$$

- Entkopplung dieser 6 BGLs in  $2 \times 3$  BGLs durch Übergang zu Schwerpunkt- und Relativkoordinaten ( $\mathbf{R} = (m_1/M)\mathbf{r}_1 + (m_2/M)\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  mit Gesamtmasse  $M = m_1 + m_2$ ):

$$M \ddot{\mathbf{R}} = 0, \quad \mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (228)$$

mit reduzierter Masse  $\mu = m_1 m_2 / M$  (siehe Abschnitt 6.5).

- Lösung der BGL für Schwerpunktkoordinate trivial:  $\mathbf{R} = \mathbf{V}_0 t + \mathbf{R}_0$  (Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit).
- Reduktion der BGL für Relativkoordinate von 3 auf 2 Dimensionen mit Hilfe von Drehimpulserhaltung  $\mathbf{l} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = (0, 0, l) = \text{const}$  (da Kraft parallel zu  $\mathbf{r}$ ) und geschickter Koordinatenwahl: damit  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$  (siehe Abschnitt 6.5).
- Da sich Kraft in (228), rechts als Gradient eines Potentials schreiben lässt,

$$-\nabla \left( \underbrace{-\frac{Gm_1 m_2}{r}}_{=V(r)} \right) = \underbrace{-\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}}_{=\mathbf{F}(\mathbf{r})=F(r)\hat{\mathbf{r}}} \quad (229)$$

(siehe Abschnitt 6.1), gilt Energieerhaltung, d.h.

$$\frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r} = E = \text{const}. \quad (230)$$

\*\*\*\*\* 28. Januar 2022 (23. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- 2-dimensionales Problem, radialsymmetrisches Potential  $\rightarrow$  verwende Polarkoordinaten:

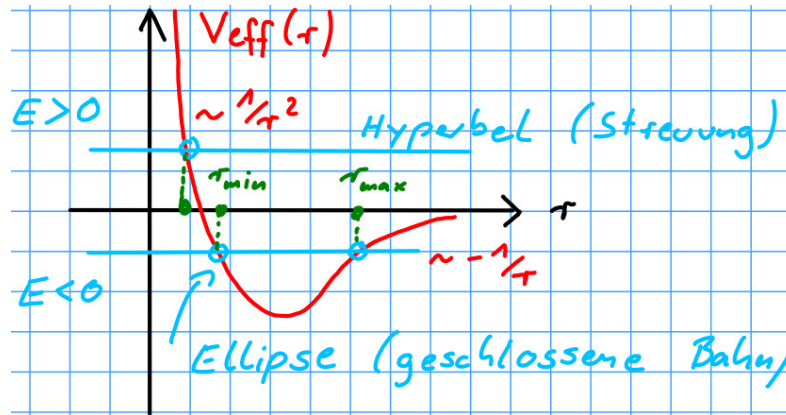
$$\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)}_{=V_{\text{eff}}(r)} = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1 m_2}{r}}_{=V_{\text{eff}}(r)} = E = \text{const} \quad (231)$$

$$\mu r^2 \dot{\varphi} = l = \text{const} \quad (232)$$

(siehe Abschnitt 7.1).

- BGL für  $\mathbf{r}$  in (228): 3 gekoppelte DGLs 2. Ordnung.

- Nach Ausnutzen von Energie- und Drehimpulserhaltung (4 Erhaltungsgrößen): 2 gekoppelte DGLs 1. Ordnung.
  - \* Radialgleichung (231) enthält kein  $\varphi$ , kann also unabhängig gelöst werden, liefert  $r(t)$ ; nach Definition eines effektiven Potentials  $V_{\text{eff}}$ , gleiche Form wie Energieerhaltung in 1 Dimension.
  - \* Dann Einsetzen von  $r(t)$  in Winkelgleichung (232), Lösung liefert  $\varphi(t)$ .
- Bisherige Überlegungen für beliebige Kräfte  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\hat{\mathbf{r}}$  bzw. Potentiale  $V(r)$  gültig, ab jetzt speziell das Gravitationspotential (attraktives  $1/r^2$ -Potential).
- Qualitative Diskussion der Radialbewegung:
  - Kleine  $r$ : Abstoßung gemäß  $+l^2/2\mu r^2$  dominiert  $V_{\text{eff}}$  (Drehimpulsbarriere).
  - Große  $r$ : Anziehung gemäß  $-Gm_1m_2/r$  dominiert  $V_{\text{eff}}$ .
  - Zwei qualitativ unterschiedliche Fälle:
    - \*  $E < 0$ :  
Oszillierende Radialkoordinate (z.B. Bewegung der Erde oder eines anderen Planeten um Sonne).
    - \*  $E > 0$ :  
Bei  $t = -\infty$  ist  $r = \infty$ , Radialkoordinate wird zunächst kleiner, Umkehrpunkt wird erreicht, Radialkoordinate wird wieder größer, bei  $t = +\infty$  ist  $r = \infty$  (z.B. Asteroid kommt von außerhalb unseres Sonnensystems, nähert sich Erde, fliegt dann wieder davon, d.h. Ablenkung durch Gravitationsfeld).



- Häufig ist Form der Bahnkurve von speziellem Interesse, d.h.  $r(\varphi)$ ; Bestimmung wie folgt:
  - Ausdrücken von  $\dot{r}$  durch  $r' = dr/d\varphi$ , Verwenden von (232):

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = r' \dot{\varphi} = r' \frac{l}{\mu r^2}. \quad (233)$$

- Einsetzen in (231):

$$\frac{l^2}{2\mu r^4} r'^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r} = E. \quad (234)$$

- Substitution  $s = 1/r$  (damit  $r' = (1/s)' = (-1/s^2)s'$ ):

$$\frac{l^2}{2\mu}s'^2 + \frac{l^2}{2\mu}s^2 - Gm_1m_2s = E. \quad (235)$$

- Erinnert (bis auf  $-Gm_1m_2s$ ) an Energieerhaltung für HO in 1 Dimension, daher Ableiten gemäß  $d/d\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{\mu}s's'' + \frac{l^2}{\mu}ss' - Gm_1m_2s' &= 0 \\ \rightarrow s'' &= -s + \frac{Gm_1m_2\mu}{l^2} \end{aligned} \quad (236)$$

(jetzt gleiche Form wie Newtonsche BGl einer Feder mit Gewicht [d.h. HO] in 1 Dimension im homogenen Schwerfeld der Erde [ein bereits gelöstes einfaches Problem]).

- Lösung:

$$s = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{Gm_1m_2\mu}{l^2} \quad (237)$$

( $A \geq 0$ ) bzw. nach Definition von  $k$  und  $\epsilon$  gemäß  $A = \epsilon/k$ ,  $Gm_1m_2\mu/l^2 = 1/k$

$$\begin{aligned} s &= \frac{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}{k} \\ \rightarrow r &= \frac{1}{s} = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}. \end{aligned} \quad (238)$$

- Minimum von  $r$  (sonnennächster Punkt, **Perihel**) bei  $\varphi = \varphi_0$ ; wähle  $\varphi_0 = 0$ , d.h. richte  $x$ - $y$ -Koordinatenachsen so aus, dass Perihel auf positiver  $x$ -Achse liegt; damit

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}. \quad (239)$$

- Zusammenhang  $k$ ,  $\epsilon$  und  $l$ ,  $E$ :

- Obige Definition:

$$\frac{Gm_1m_2\mu}{l^2} = \frac{1}{k}. \quad (240)$$

- Energie (234) ausgewertet am Perihel (dort gilt  $r' = 0$  sowie  $r = k/(1 + \epsilon)$ ):

$$\frac{l^2(\epsilon^2 - 1)}{2\mu k^2} = E. \quad (241)$$

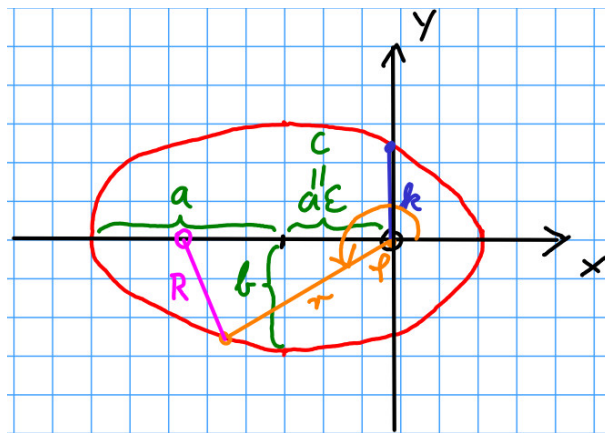
- Diese beiden Gleichungen entweder nach  $k$ ,  $\epsilon$  oder  $l$ ,  $E$  auflösen.

→ Hausaufgabe.

\*\*\*\*\* 31. Januar 2022 (24. Vorlesung) \*\*\*\*\*

## 8.1 Planetenbewegung ( $\epsilon < 1$ )

- $\epsilon < 1$ : Radialkoordinate oszilliert, entspricht oben diskutiertem Fall  $E < 0$  (ersichtlich auch aus (241)), Planetenbewegung.
- $r(\varphi) = r(\varphi + 2\pi)$ , d.h. Radialbewegung wiederholt sich exakt nach einem Umlauf, also geschlossene Bahnen.
- $\epsilon = 0$ : Kreisbewegung mit Radius  $k$ .
- (239) beschreibt für  $\epsilon < 1$  eine Ellipse (Nachweis in Hausaufgabe):
  - Definition einer Ellipse durch  $R + r = 2a = \text{const}$  mit Parametern  $a$  (**große Halb-achse**) und  $c$  (Abstand der **Brennpunkte** vom Ellipsenzentrum).
  - Man kann zeigen:  $k = (a^2 - c^2)/a$ ,  $\epsilon = c/a$  (**Exzentrizität**) (sowie  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  [**kleine Halb-achse**]).



- Wähle Koordinatensystem so, dass Schwerpunkt im Ursprung ruht, d.h.  $\mathbf{R} = 0$ , dann

$$\mathbf{r}_1 = +\frac{m_2}{M}\mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{M}\mathbf{r}, \quad (242)$$

d.h. beide Himmelskörper bewegen sich auf Ellipsen, der schwerere auf einer kleineren Ellipse, der leichtere auf einer größeren Ellipse.

- Bei stark unterschiedlichen Massen  $m_1 \ll m_2$  kann Bewegung des schwereren Himmelskörpers vernachlässigt werden, z.B.  $m_1 = m_{\text{Erde}} = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ ,  $m_2 = m_{\text{Sonne}} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ , dann

$$\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{r}_2 \approx 0 \quad (243)$$

und  $M = m_1 + m_2 \approx m_2$ ,  $\mu = m_1 m_2 / M \approx m_1$ .

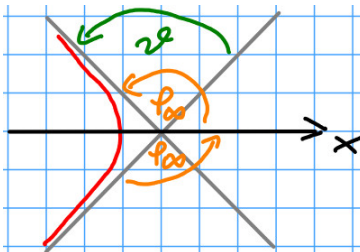
- **Keplersche Gesetze** (1609, 1618):

- (1) Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.



- Streuung:
  - Häufig Beschuss eines ruhenden Teilchens (**Target**) mit einem anderen Teilchen (**Projektil**), dann Vermessung der Häufigkeit der Flugrichtungen von Projektil und Target nach Kollision.
  - Z.B. Beschuss Gold-Atomkern mit Helium-Kern (elektromagnetische WW, Rutherford-Streuer Versuch, 1909–1913).
  - Analog Erde und Asteroid (gravitative WW).
- Bei unendlich schwerem, d.h. statischem Target bewegt sich nur das Projektil, Energie ist erhalten,  $E = (m_1/2)v_\infty^2$  (kinetische Energie im Unendlichen).
- Charakterisierung des Anfangszustands durch Stoßparameter  $b$ .
- Charakterisierung des Endzustands durch Ablenkwinkel  $\vartheta$ :
  - Radialkoordinate
 
$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \quad (249)$$

unendlich bei Winkeln  $\varphi_\infty$  mit  $\cos(\varphi_\infty) = -1/\epsilon$  (d.h.  $-\pi < \varphi_\infty < -\pi/2$  oder  $+\pi/2 < \varphi_\infty < +\pi$ ).
  - Damit  $\vartheta = 2\varphi_\infty - \pi = 2\arccos(-1/\epsilon) - \pi$ .



- Beziehung zwischen Anfangs- und Endzustand: Drücke  $\vartheta$  durch  $b$  aus.

- Für Ablenkwinkel gilt:

$$\frac{1}{\epsilon} = -\cos(\vartheta/2 + \pi/2) = \sin(\vartheta/2) \quad (250)$$

$$\tan^2(\vartheta/2) = \frac{\sin^2(\vartheta/2)}{\cos^2(\vartheta/2)} = \frac{\sin^2(\vartheta/2)}{1 - \sin^2(\vartheta/2)} = \frac{1}{\epsilon^2(1 - 1/\epsilon^2)} = \frac{1}{\epsilon^2 - 1}. \quad (251)$$

- Energie ist proportional zu  $\epsilon^2 - 1$ : Betrachte dazu Perihel,

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon} = \frac{l^2}{Gm_1m_2\mu(1 + \epsilon)} \approx \frac{l^2}{Gm_1^2m_2(1 + \epsilon)} \quad (252)$$

$$\begin{aligned} E &= V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2m_1r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r} \approx \frac{G^2m_1^3m_2^2}{2l^2} \left( (1 + \epsilon)^2 - 2(1 + \epsilon) \right) = \\ &= \frac{G^2m_1^3m_2^2}{2l^2} (\epsilon^2 - 1) \end{aligned} \quad (253)$$

(in (252) wurde (240) verwendet und  $m_1 \ll m_2$  angenommen [ein leichter Himmelskörper wird durch einen schweren Himmelskörper abgelenkt], d.h.  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) \approx m_1$ ), damit

$$\tan^2(\vartheta/2) \approx \frac{G^2 m_1^3 m_2^2}{2l^2 E}. \quad (254)$$

\*\*\*\*\* 04. Februar 2022 (25. Vorlesung) \*\*\*\*\*

– Drücke  $l$  durch  $b$  aus,

$$l = m_1 b v_\infty = b \sqrt{2m_1 E}, \quad (255)$$

damit

$$\tan(\vartheta/2) \approx \frac{Gm_1 m_2}{2bE}. \quad (256)$$

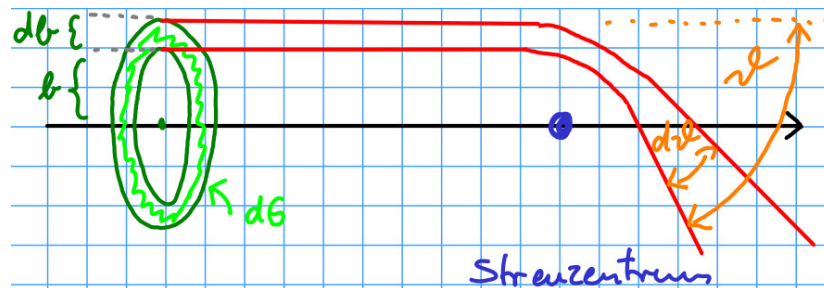
- Zentrale Größe der Streutheorie ist **differentieller Wirkungsquerschnitt**  $d\sigma/d\vartheta$  (bzw. üblicher  $d\sigma/d\Omega$ , siehe unten):

–  $d\vartheta$ : Kleines Streuwinkelintervall.

–  $d\sigma$ : Kleine Fläche des durch den zugehörigen Stoßparameter beschriebenen Kreisrings,  $d\sigma = -2\pi b db$ .

\* Wenn  $b$  größer wird, wird  $\vartheta$  kleiner, und umgekehrt (siehe (256)); damit  $db < 0$ , wenn  $d\vartheta > 0$ .

\* Konvention: Positiver Flächenzuwachs  $d\sigma$  bei positivem  $d\vartheta$  (Fläche des Wirkungsquerschnitts  $\sigma$  wächst; wenn man  $\vartheta$  vergrößert), erfordert bzw. erklärt Minuszeichen in obiger Definition  $d\sigma = -2\pi b db$ .



- Es gilt

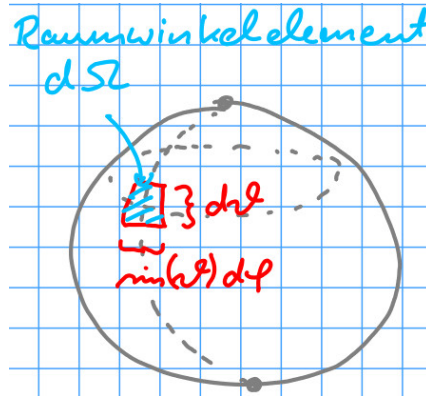
$$\begin{aligned} d\sigma &= -2\pi b \frac{db}{d\vartheta} d\vartheta \approx -2\pi \frac{Gm_1 m_2}{2E \tan(\vartheta/2)} \left( \frac{d}{d\vartheta} \frac{Gm_1 m_2}{2E \tan(\vartheta/2)} \right) d\vartheta = \\ &= \underbrace{\pi \left( \frac{Gm_1 m_2}{2E} \right)^2}_{=d\sigma/d\vartheta} \frac{1}{\tan(\vartheta/2) \sin^2(\vartheta/2)} d\vartheta. \end{aligned} \quad (257)$$

- Üblicher ist Verwendung des **Raumwinkels**  $\Omega \in [0, 4\pi]$  (Fläche auf Einheitskugel; analog zu Winkel, der Bogenlänge auf Einheitskreis entspricht).

- Raumwinkelement:

$$d\Omega = d\vartheta \sin(\vartheta) d\varphi \quad (258)$$

(mehr dazu in Kapitel 9.1).



- Ergänze in (257)  $d\varphi/2\pi$  (dann bei vollem Umlauf Faktor 1).
- Verwende Additionstheorem  $\sin(\vartheta) = 2 \sin(\vartheta/2) \cos(\vartheta/2)$ .
- Damit

$$d\sigma \approx \frac{1}{2} \left( \frac{Gm_1 m_2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\tan(\vartheta/2) \sin^2(\vartheta/2)} d\vartheta d\varphi = \left( \frac{Gm_1 m_2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)} d\Omega, \quad (259)$$

die sogenannte **Rutherford'sche Streuformel**; in der Regel findet man diese für elektromagnetische WW,  $Gm_1 m_2 \rightarrow q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ . d.h.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{q_1 q_2}{(4\pi\epsilon_0) 4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}. \quad (260)$$



## 9 Volumenintegrale in krummlinigen Koordinaten

### 9.1 Volumenelement, Jacobi-Matrix, Jacobi-Determinante

- Die folgenden Überlegungen gelten in beliebiger Anzahl von Dimensionen:
  - 1-dimensionales Volumen = Bogenlänge,
  - 2-dimensionales Volumen = Fläche,
  - 3-dimensionales Volumen = räumliches Volumen,
  - 4-dimensionales Volumen schwer visualisierbar ...

- Fläche eines Rechtecks mit Kantenlängen  $a$  und  $b$ ,

$$\int_0^a dx \int_0^b dy = \int_0^a dx y \Big|_0^b = b \int_0^a dx = bx \Big|_0^a = ab \quad (261)$$

... o.k.

- Fläche eines Kreises mit Radius  $R$  (Verwendung von kartesischen Koordinaten),

$$\begin{aligned} 4 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy &= 4 \int_0^R dx y \Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = 4 \int_0^R dx \sqrt{R^2-x^2} = \\ &= 2 \left( x \sqrt{R^2-x^2} + R^2 \arcsin(x/R) \right) \Big|_0^R = \pi R^2 \end{aligned} \quad (262)$$

... o.k., aber Integrationsgrenzen in kartesischen Koordinaten unpraktisch.

- Fläche eines Kreises mit Radius  $R$  (Verwendung von Polarkoordinaten):

– Versuch:

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R \quad (263)$$

... offenbar falsch!

\*\*\*\*\* 07. Februar 2022 (26. Vorlesung) \*\*\*\*\*

– **Volumenelement** (in 2 Dimensionen auch **Flächenelement**):

\* Kartesische Koordinaten:

$$dV = dx dy \quad (264)$$

( $dV, dx, dy \geq 0$  soll gelten [keine wesentliche Einschränkung]).

\* Polarkoordinaten:

$$dV = \left| \det \begin{pmatrix} d\mathbf{r}_r & d\mathbf{r}_\varphi \end{pmatrix} \right| = \underbrace{\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \right|}_{=J} dr d\varphi \quad (265)$$

( $dV, dr, d\varphi \geq 0$ ).

•  $d\mathbf{r}_r$ : Infinitesimaler Vektor, der infinitesimaler Veränderung  $dr$  entspricht.

- $d\mathbf{r}_\varphi$ : Infinitesimaler Vektor, der infinitesimaler Veränderung  $d\varphi$  entspricht.
- $\det(d\mathbf{r}_r \ d\mathbf{r}_\varphi)$  ist orientiertes Volumen des von  $d\mathbf{r}_r$  und  $d\mathbf{r}_\varphi$  aufgespannten Spats.
- $J$ : **Jacobi-Matrix**.
- $\det(J)$ : **Jacobi-Determinante, Funktionaldeterminante**.

Es gilt

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

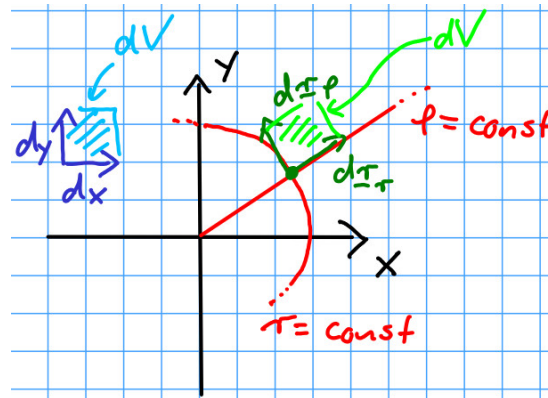
$$\rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ +r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & +r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \det(J) = r \tag{266}$$

und damit

$$dV = r dr d\varphi. \tag{267}$$



– Erneuter Versuch der Kreisflächenberechnung:

$$\int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2 \tag{268}$$

... jetzt o.k.

- Allgemeine Beziehung zwischen Volumenelementen in  $n$ -dimensionalen Koordinaten  $\eta_j$  und  $\xi_k$

$$d\eta_1 \dots d\eta_m = \underbrace{\left| \det \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_k} \right) \right|}_{=J} d\xi_1 \dots d\xi_n \tag{269}$$

(kann man analog zum obigen Beispiel zeigen).

- Z.B. kartesische Koordinaten  $\eta_j = (x, y, z)$  und Kugelkoordinaten  $\xi_k = (r, \vartheta, \varphi)$ ,

$$dV = dx dy dz = \left| \det \begin{pmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \vartheta & \partial x / \partial \varphi \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \vartheta & \partial y / \partial \varphi \\ \partial z / \partial r & \partial z / \partial \vartheta & \partial z / \partial \varphi \end{pmatrix} \right| dr d\vartheta d\varphi = \dots = r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi; \quad (270)$$

damit z.B. das Volumen einer Kugel mit Radius  $R$ ,

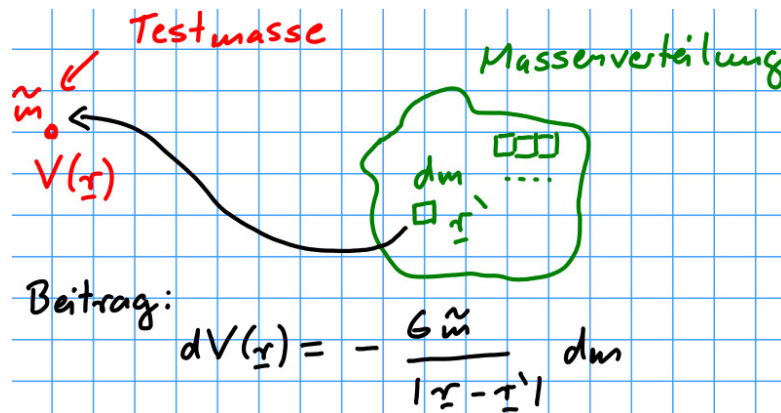
$$\int_{\text{Kugel, Radius } R} dV = \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}. \quad (271)$$

- Aus (270) ist auch Flächenelement auf Oberfläche einer Kugel mit Radius  $r$  ablesbar,  $dA = r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$  bzw. bei Einheitskugel ( $r = 1$ ) Raumwinkelement  $d\Omega = \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$  (verwendet beim differentiellen Wirkungsquerschnitt, siehe (258)).

## 9.2 Gravitationspotential einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung

- Gegeben: Sphärisch symmetrische Massenverteilung, **Dichte** bzw. **Massendichte**  $\rho(r)$  (Einheit von  $\rho$ : Masse/Volumen).
- Gesucht: Von Massenverteilung generiertes Gravitationspotential  $V(\mathbf{r})$  bezogen auf eine **Testmasse**  $\tilde{m}$ .
- Beziehung zwischen Massen- und Volumenelement:  $dm = \rho(r) d^3r$  (mit  $d^3r = dx dy dz$ ).
- Beitrag eines Massenelements  $dm$  bei  $\mathbf{r}'$  zum Gravitationspotential:

$$dV(\mathbf{r}) = -\frac{G\tilde{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dm. \quad (272)$$



- Damit

$$V(\mathbf{r}) = -G\tilde{m} \int d^3r' \frac{\rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (273)$$

( $r' = |\mathbf{r}'|$ ).

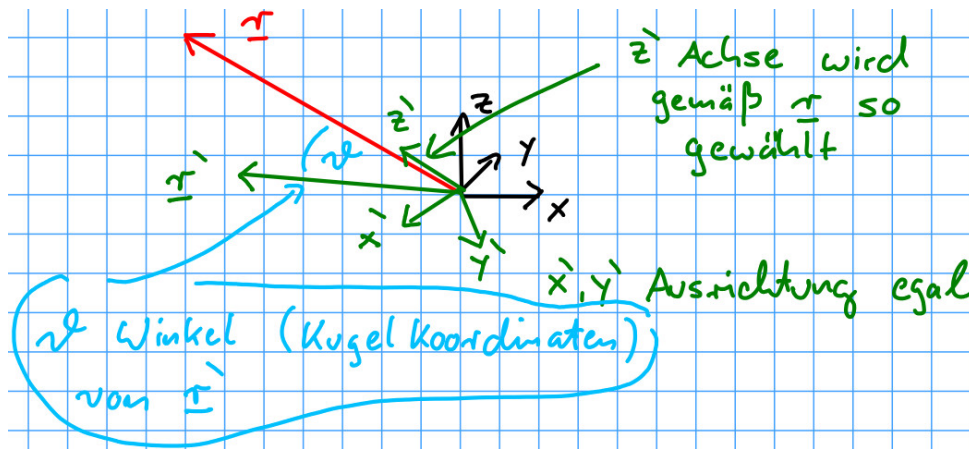
- Übergang von kartesischen zu Kugelkoordinaten,  $\mathbf{r}' = (r' \sin(\vartheta) \cos(\varphi), r' \sin(\vartheta) \sin(\varphi), r' \cos(\vartheta))$ , dann

$$\int d^3 r' \dots = \int_0^\infty dr' r'^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \dots \quad (274)$$

- Wähle  $\mathbf{r}'$ -Koordinatensystem so, dass  $\mathbf{r}$  auf der  $z'$ -Achse liegt, dann

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \left( \mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}' + \mathbf{r}'^2 \right)^{1/2} = \left( r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\vartheta) \right)^{1/2} \quad (275)$$

(im  $\mathbf{r}'$ -Koordinatensystem ist  $\mathbf{r} = (0, 0, r)$  und  $\mathbf{r}' = (\dots, \dots, r' \cos(\vartheta))$ , daher  $\mathbf{r}\mathbf{r}' = rr' \cos(\vartheta)$ ).



- Insgesamt

$$\begin{aligned} V(r) &= -G\tilde{m} \int_0^\infty dr' r'^2 \rho(r') \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\vartheta))^{1/2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} = \\ &= -2\pi G\tilde{m} \int_0^\infty dr' r'^2 \rho(r') \frac{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\vartheta))^{1/2} \Big|_0^\pi}{rr'} = \\ &= -\frac{2\pi G\tilde{m}}{r} \int_0^\infty dr' r' \rho(r') (r + r' - |r - r'|), \end{aligned}$$

wobei  $(r^2 + r'^2 \pm 2rr')^{1/2} = |r \pm r'|$  verwendet wurde.

- Z.B. homogene sphärische Massenverteilung mit Radius  $R$  (Staubwolke, Sonne, Planet).

– Dichte:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{falls } r < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (276)$$

– Gesamtmasse:

$$M = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3}. \quad (277)$$

– Gravitationspotential:

$$V(r) = -\frac{2\pi G\tilde{m}\rho_0}{r} \int_0^R dr' r' (r + r' - |r - r'|), \quad (278)$$

zur weiteren Integration Fallunterscheidung.

\*  $r \geq R$ : Dann  $r' < r$ ,

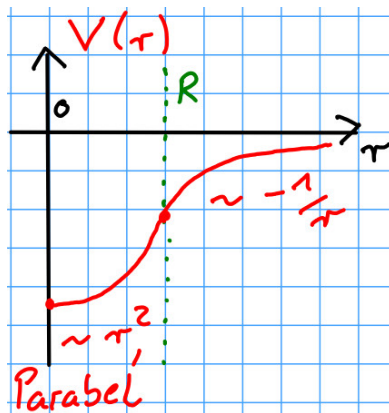
$$V(r) = -\frac{2\pi G\tilde{m}\rho_0}{r} \underbrace{\int_0^R dr' r' (2r')}_{=2R^3/3} = -\frac{G\tilde{m}M}{r}, \quad (279)$$

d.h. außerhalb der Massenverteilung  $V(r)$  ununterscheidbar vom Gravitationspotential eines Massenpunkts der Masse  $M$  (Aussage kann analog für beliebige  $\rho(r)$  gezeigt werden → Hausaufgabe).

\*  $r < R$ :

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{2\pi G\tilde{m}\rho_0}{r} \left( \underbrace{\int_0^r dr' r' (2r')}_{=2r^3/3} + \underbrace{\int_r^R dr' r' (2r)}_{=r(R^2-r^2)} \right) = \\ &= \frac{G\tilde{m}M(r^2 - 3R^2)}{2R^3}, \quad (280) \end{aligned}$$

also quadratisches, d.h. HO-Potential im Inneren der Massenverteilung.




---

## Aufgabe

Sie graben, beginnend in Frankfurt, diametral einen Tunnel durch die Erde bis nach Australien. Dort angekommen springen Sie in das Loch. Wie lange dauert es, bis Sie nach Frankfurt zurückgefallen sind?

- Im Tunnel liegt oben berechnetes HO-Potential vor, Frequenz  $\omega$  über

$$\frac{\tilde{m}\omega^2 r^2}{2} = \frac{G\tilde{m}Mr^2}{2R^3} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}. \quad (281)$$

- Falldauer ist halbe Periodendauer,

$$t_{\text{Australien} \rightarrow \text{Frankfurt}} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{GM}}. \quad (282)$$

- Mit Erdradius  $R \approx 2\pi \times 10^6$  m, Gravitationskonstante  $G \approx (2/3) \times 10^{-10}$  m<sup>3</sup>/kg s<sup>2</sup>, Erdmasse  $M \approx 6 \times 10^{24}$  kg ergibt sich

$$t_{\text{Australien} \rightarrow \text{Frankfurt}} \approx \sqrt{2\pi^5} \times 10^2 \text{ s} \approx 2474 \text{ s} \approx 40 \text{ min}. \quad (283)$$


---

## 10 Starrer Körper (1. Teil, Grundlagen)

- “Starrer Körper (2. Teil, fortgeschrittene Konzepte)” gegen Ende der Vorlesung “Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik” im Sommersemester.

### 10.1 Definition, charakteristische Größen

- **Starrer Körper:**

- $N$  Massenpunkte: Massen  $m_j$ , Positionen  $\mathbf{r}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ .
- Zwangsbedingungen:  $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| = \text{const}$ , d.h. Massenpunkte bilden bewegliches Gesamtobjekt, dessen Form bleibt aber erhalten (z.B. Ball, Stock, Flugzeug, etc.).
- Lediglich ein Modell (Deformationen des Körpers, Schwingungen seiner Atome, etc. vernachlässigt), beschreibt ausgedehnte Objekte in vielen Fällen gut.

- Häufig kontinuierliche Massenverteilung ( $N \rightarrow \infty$ ):

- Zweckmäßige Beschreibung, wenn z.B.  $\mathcal{O}(10^{23})$  Atome ein makroskopisches ausgedehntes Objekt bilden.
- $m_j$ ,  $\mathbf{r}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  wird ersetzt durch Dichte  $\rho(\mathbf{r})$ .

- Anzahl der **Freiheitsgrade** bei Bewegung im 3-dimensionalen Raum:

- $N = 1$  (d.h. Massenpunkt): 3 (Translation).
- $N = 2$ : 3 (Translation) + 2 (Rotation).
- $N \geq 3$ : 3 (Translation) + 3 (Rotation)  
(Rotation kann z.B. durch Vektor  $\vec{\alpha}$  beschrieben werden mit Drehachse  $\hat{\vec{\alpha}}$  und Drehwinkel  $|\vec{\alpha}|$  um diese Achse).

- Charakteristische Größen eines starren Körpers über Summen oder Volumenintegrale (siehe Kapitel 9), z.B.

- Masse

$$M = \sum_{j=1}^N m_j \quad \text{bzw.} \quad M = \int d^3r \rho(\mathbf{r}), \quad (284)$$

- Schwerpunkt

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \mathbf{r}_j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{R} = \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{M} \mathbf{r}. \quad (285)$$

\*\*\*\*\* 14. Februar 2022 (28. Vorlesung) \*\*\*\*\*

## 10.2 Rotationsmatrizen

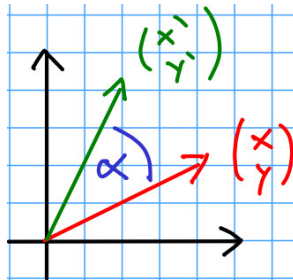
- Definierende Eigenschaften von **Rotationsmatrizen**  $\mathcal{R}$ :

- **Orthogonale Matrizen**, d.h.  $\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathcal{R} \mathcal{R}^T = \mathbb{1}$ .
- $\det(\mathcal{R}) = 1$ .

- Rotationsmatrix in 2 Dimensionen in  $x$ - $y$ -Ebene, Drehwinkel  $\alpha$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} +\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ +\sin(\alpha) & +\cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{=\mathcal{R}(\alpha)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (286)$$

$((x', y')$  ist gegenüber  $(x, y)$  entgegen dem Uhrzeigersinn um  $\alpha$  gedreht).



- Erfüllt  $\mathcal{R}^T(\alpha)\mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{R}(\alpha)\mathcal{R}^T(\alpha) = \mathbb{1}$  und  $\det(\mathcal{R}(\alpha)) = 1$ .
- Norm eines Vektors verändert sich nicht bei Rotation:

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'} = \sqrt{\mathbf{r}^T \mathcal{R}^T(\alpha) \mathcal{R}(\alpha) \mathbf{r}} = \sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{r}} = |\mathbf{r}| \quad (287)$$

(mit  $\mathbf{r}' = (x', y')$  und  $\mathbf{r} = (x, y)$ ).

- Inverse Rotationsmatrix zu  $\mathcal{R}(\alpha)$  ist

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(-\alpha) &= \begin{pmatrix} +\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ +\sin(-\alpha) & +\cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(\alpha) & +\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & +\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \\ &= (\mathcal{R}(\alpha))^T. \end{aligned} \quad (288)$$

- Rotationsmatrix in 3 Dimensionen um  $x$ -Achse, d.h. in  $y$ - $z$ -Ebene, Winkel  $\alpha$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & +\sin(\alpha) & +\cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{=\mathcal{R}_x(\alpha)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (289)$$

(analog für  $y$ - und  $z$ -Achse).



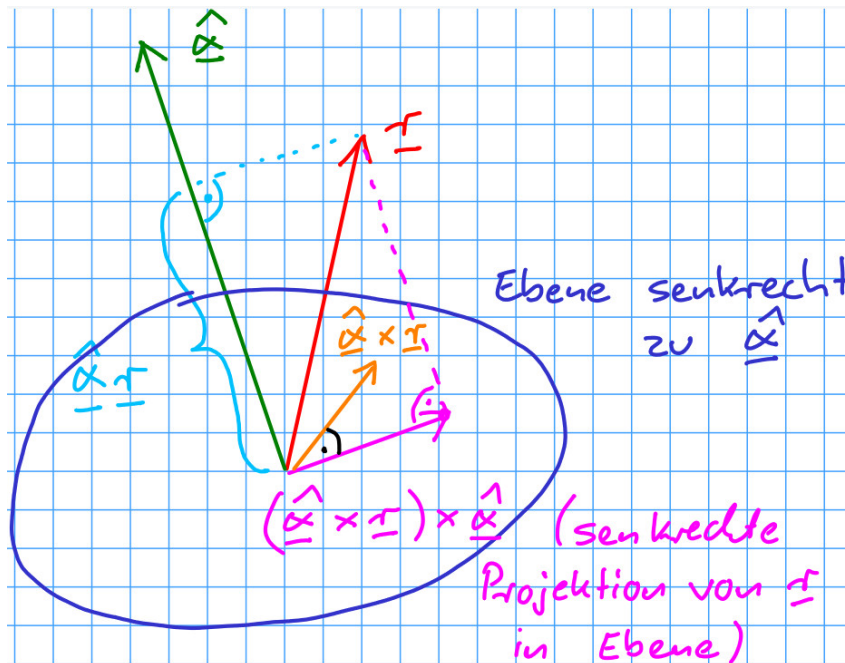
- Rotationsmatrix in 3 Dimensionen um Drehachse  $\hat{\vec{\alpha}} = \vec{\alpha}/|\vec{\alpha}|$  und Drehwinkel  $\alpha = |\vec{\alpha}|$ :

$$\mathbf{r}' = \underbrace{\hat{\vec{\alpha}}(\hat{\vec{\alpha}}\mathbf{r}) + \cos(\alpha)(\hat{\vec{\alpha}} \times \mathbf{r}) \times \hat{\vec{\alpha}} + \sin(\alpha)\hat{\vec{\alpha}} \times \mathbf{r}}_{\mathcal{R}(\vec{\alpha})\mathbf{r}} \quad (290)$$

(mit  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  und  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ) bzw.

$$\mathcal{R}(\vec{\alpha}) = (1 - \cos(\alpha))\hat{\vec{\alpha}} \otimes \hat{\vec{\alpha}} + \cos(\alpha)\mathbb{1} + \sin(\alpha) \sum_j (\hat{\vec{\alpha}} \times \mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_j \quad (291)$$

(dyadisches Produkt bzw. Tensorprodukt  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{jk} = a_j b_k$ ).



### 10.3 Rotation um feste Achse

- Keine Translation, o.b.d.A. Rotation um  $x$ -Achse parametrisiert durch Winkel  $\alpha$ .
- Schwerpunkt in Abhängigkeit von  $\alpha$ :  $\mathbf{R}'(\alpha)$  ( $\mathbf{R}'(\alpha = 0)$  entspricht  $\mathbf{R}$  in (285)):
  - Rotation von  $\mathbf{r}_j$  um  $\alpha$ :  $\mathbf{r}'_j(\alpha) = \mathcal{R}_x(\alpha)\mathbf{r}_j$ .
  - Damit

$$\mathbf{R}'(\alpha) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \mathbf{r}'_j = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \mathcal{R}_x(\alpha)\mathbf{r}_j = \mathcal{R}_x(\alpha) \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \mathbf{r}_j = \mathcal{R}_x(\alpha)\mathbf{R}. \quad (292)$$

- Analoge Formulierung für kontinuierliche Massenverteilung:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}'(\alpha) &= \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{M} \mathbf{r}' = \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{M} \mathcal{R}_x(\alpha) \mathbf{r} = \mathcal{R}_x(\alpha) \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{M} \mathbf{r} = \\ &= \mathcal{R}_x(\alpha) \mathbf{R}\end{aligned}\quad (293)$$

(Interpretation:  $\mathbf{r}$  entspricht Summationsindex  $j$ , relatives Gewicht  $\frac{\rho(\mathbf{r})}{M}$  für rotierten Raumpunkt  $\mathbf{r}'$ ).

- Damit gezeigt: Schwerpunkt des starren Körpers rotiert mit dem starren Körper, d.h. genau wie jeder seiner Massenpunkte (wie erwartet).
- (293) kann auch alternativ hergeleitet werden:

- \* Starte mit (285), rechts, wobei Dichte als  $\alpha$ -abhängig betrachtet wird, d.h.  $\rho'(\alpha, \mathbf{r})$ :

$$\mathbf{R}'(\alpha) = \int d^3r \frac{\rho'(\alpha, \mathbf{r})}{M} \mathbf{r}. \quad (294)$$

- \*  $\rho'(\alpha, \mathbf{r}) = \rho(\mathcal{R}_x(-\alpha)\mathbf{r})$  (um  $\alpha$  rotierte Dichte  $\rho'(\alpha, \mathbf{r})$  ergibt sich, indem unrotierte Dichte  $\rho$  an “rückwärts rotiertem Punkt”  $\mathcal{R}_x(-\alpha)\mathbf{r}$  ausgewertet wird).

- \* Damit

$$\begin{aligned}\mathbf{R}'(\alpha) &= \int d^3r \frac{\rho(\overbrace{\mathcal{R}_x(-\alpha)\mathbf{r}}^{\tilde{\mathbf{r}}})}{M} \mathbf{r} = \int d^3\tilde{r} \frac{\rho(\tilde{\mathbf{r}})}{M} \mathcal{R}_x(\alpha) \tilde{\mathbf{r}} = \\ &= \mathcal{R}_x(\alpha) \underbrace{\int d^3\tilde{r} \frac{\rho(\tilde{\mathbf{r}})}{M} \tilde{\mathbf{r}}}_{=\mathbf{R}},\end{aligned}\quad (295)$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathcal{R}_x(-\alpha)\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} = \mathcal{R}_x(\alpha)\tilde{\mathbf{r}} \quad (296)$$

$$\begin{aligned}\int d^3r \dots &= \int d^3\tilde{r} \left| \det \left( \frac{\partial r_j}{\partial \tilde{r}_k} \right) \right| \dots = \int d^3\tilde{r} \underbrace{\left| \det(\mathcal{R}_x(\alpha)) \right|}_{=1} \dots = \\ &= \int d^3\tilde{r} \dots\end{aligned}\quad (297)$$

verwendet wurde.

- Ab jetzt nur noch kontinuierliche Massenverteilung (endliche Anzahl von Massenpunkten aber analog).
- Kinetische Energie eines Massenelements bei  $\mathbf{r}'$ :

$$dT = \frac{dm \mathbf{v}^2}{2} = \frac{dm (y'^2 + z'^2) \dot{\alpha}^2}{2} = \frac{dm (y^2 + z^2) \dot{\alpha}^2}{2} \quad (298)$$

( $y'^2 + z'^2 = y^2 + z^2$ , da Rotation um  $x$ -Achse).

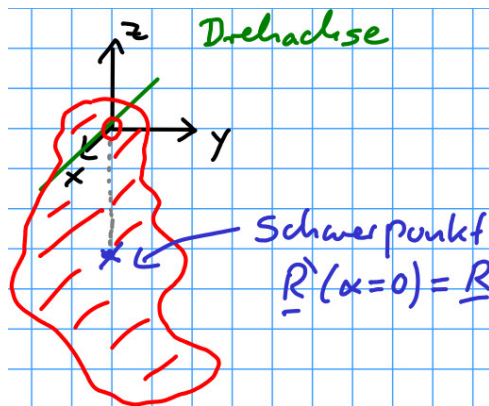
- Kinetische Energie:

$$\begin{aligned}T &= \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})(y'^2 + z'^2) \dot{\alpha}^2}{2} = \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})(y^2 + z^2) \dot{\alpha}^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left( \int d^3r \rho(\mathbf{r})(y^2 + z^2) \right)}_{=J} \dot{\alpha}^2\end{aligned}\quad (299)$$

( $J$  bezeichnet das **Trägheitsmoment** [bezüglich der  $x$ -Achse]; Trägheitsmoment bei Drehbewegungen analog zur Masse bei Translationen [Vergleich z.B. mit  $T = (1/2)m\dot{x}^2$ ]).

### 10.3.1 Physikalisches Pendel

- Betrachte Schwingungen im homogenen Schwerfeld, d.h.  $\mathbf{F} = -mge_z$  (**physikalisches Pendel**).
- Wähle Ausrichtung des starren Körpers so, dass sich Schwerpunkt bei  $\alpha = 0$  senkrecht unter Ursprung (damit auch unter Drehachse [=  $x$ -Achse]) befindet, d.h.  $\mathbf{R}'(\alpha = 0) = \mathbf{R} = (0, 0, -R)$  (wobei  $R = |\mathbf{R}| = \text{const}$  Abstand des Schwerpunkts von Drehachse ist).



- Damit und aus (289) und (293) folgt

$$\mathbf{R}'(\alpha) = \mathcal{R}_x(\alpha)\mathbf{R} = R \begin{pmatrix} 0 \\ +\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (300)$$

- Bewegungsgleichung über Energieerhaltung:

- Potentielle Energie eines Massenelements bei  $\mathbf{r}'$ :

$$dV = dm g z'. \quad (301)$$

- Potentielle Energie:

$$V = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) g z' = Mg R'_z(\alpha) = -MgR \cos(\alpha)$$

((293) und ((300) wurden verwendet), d.h. Minimum der potentiellen Energie bei  $\alpha = 0$  (wie erwartet).

- Energieerhaltung:

$$T + V = \frac{J}{2} \dot{\alpha}^2 - MgR \cos(\alpha) = \text{const} \quad (302)$$

bzw. für kleine Schwingungen ( $\alpha \ll 1$ )

$$\frac{J}{2} \dot{\alpha}^2 + \frac{MgR}{2} \alpha^2 = \text{const} \quad (303)$$

$$(\cos(\alpha) = 1 - \alpha^2/2 + \mathcal{O}(\alpha^4)).$$

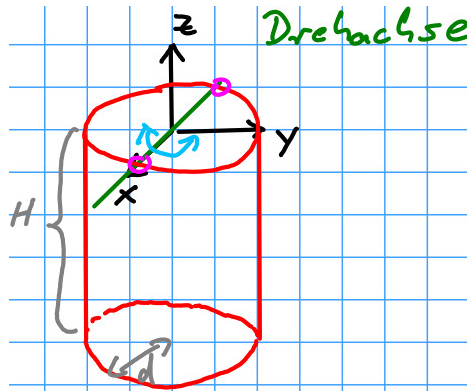
- Hat gleiche Struktur, wie Energieerhaltung des HOs in 1 Dimension ( $(m/2)\dot{x}^2 + (m\omega^2/2)x^2 = \text{const}$ ), Lösung daher klar,

$$\alpha = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{MgR}{J}} \quad (304)$$

mit unbestimmten Konstanten  $A$  und  $\varphi$ .

### Aufgabe

Ein entsprechend der nachfolgenden Skizze um die  $x$ -Achse drehbarer homogener Zylinder (Radius  $d$ , Höhe  $H$ , Masse  $M$ ) vollführt kleine Schwingungen. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer.



- Dichte:

$$\rho_0 = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi d^2 H}. \quad (305)$$

- Trägheitsmoment:

$$\begin{aligned} J &= \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) (y^2 + z^2) = \int_0^d dr r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H}^0 dz \rho_0 (r^2 \sin^2(\varphi) + z^2) = \\ &= \rho_0 \left( \underbrace{\int_0^d dr r^3}_{=d^4/4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2(\varphi)}_{=\pi} \underbrace{\int_{-H}^0 dz}_{=H} + \underbrace{\int_0^d dr r}_{=d^2/2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \underbrace{\int_{-H}^0 dz z^2}_{=H^3/3} \right) = \\ &= M \left( \frac{d^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right) \end{aligned} \quad (306)$$

(Zylinderkoordinaten: Jacobi-Determinante ist  $r$ ,  $y = r \sin(\varphi)$ ).

- Schwingungsdauer:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mg(H/2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{gH} \left( \frac{d^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right)}. \quad (307)$$

### 10.3.2 Satz von Steiner

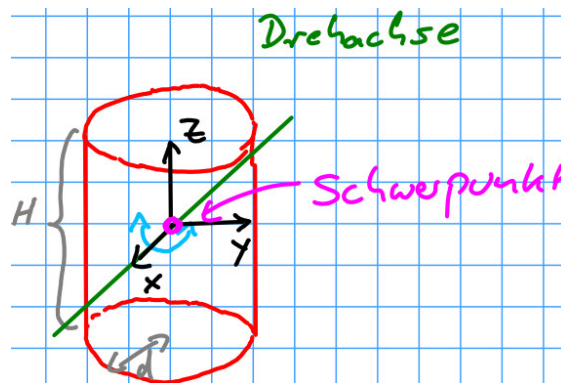
- **Satz von Steiner** stellt Beziehung zwischen Trägheitsmomenten eines starren Körpers (Masse  $M$ ) bezüglich paralleler Drehachsen her:

$$J = J_{\text{SP}} + MD^2. \quad (308)$$

- $J_{\text{SP}}$ : Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt.
- $J$ : Trägheitsmoment bezüglich einer dazu parallelen Achse mit Abstand  $D$ .

#### Aufgabe

Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines entsprechend der nachfolgenden Skizze um die  $x$ -Achse drehbaren homogenen Zylinders (Radius  $d$ , Höhe  $H$ , Masse  $M$ ).



- Benutze Ergebnis aus vorangegangener Aufgabe und Satz von Steiner:

$$J_{\text{SP}} = J - M\left(\frac{H}{2}\right)^2 = M\left(\frac{d^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right) - M\frac{H^2}{4} = M\left(\frac{d^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right). \quad (309)$$

- Beweis des Satzes von Steiner:

- Wähle Ausrichtung des starren Körpers so, dass Schwerpunkt im Ursprung (d.h.  $\mathbf{R} = 0$ ) und Drehachse durch den Schwerpunkt der  $x$ -Achse entspricht.

- Damit

$$J_{\text{SP}} = \int d^3r \rho(\mathbf{r})(y^2 + z^2). \quad (310)$$

- Trägheitsmoment bezüglich einer zur  $x$ -Achse parallelen Achse, verschoben um Vektor  $\vec{\Delta}$ :

$$J = \int d^3r \rho(\mathbf{r})\left((y + \Delta_y)^2 + (z + \Delta_z)^2\right) =$$

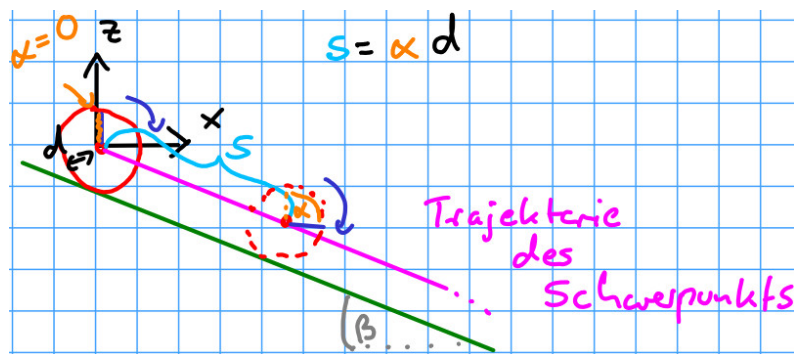
$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\int d^3r \rho(\mathbf{r})(y^2 + z^2)}_{=J_{\text{SP}}} + 2 \left( \underbrace{\Delta_y \int d^3r \rho(\mathbf{r})y}_{=R_y=0} + \underbrace{\Delta_z \int d^3r \rho(\mathbf{r})z}_{=R_z=0} \right) \\
&\quad + \underbrace{(\Delta_y^2 + \Delta_z^2) \int d^3r \rho(\mathbf{r})}_{=M} = J_{\text{SP}} + MD^2, \tag{311}
\end{aligned}$$

wobei  $D = \sqrt{\Delta_y^2 + \Delta_z^2}$  der Abstand der beiden Achsen ist.

\*\*\*\*\* ab hier nicht mehr Teil des WiSe 2021/22 (wird eventuell im SoSe 2022 besprochen) \*\*\*\*\*

## 10.4 Rollbewegung

- Diskutiere Rollbewegung exemplarisch anhand eines eine schiefe Ebene (Neigungswinkel  $\beta$ ) hinunterrollenden homogenen Zylinders (Radius  $d$ , Masse  $M$ ).



- Koordinaten:

- $s$ : Zurückgelegte Strecke (Translation).
- $\alpha$ : Rotation des Zylinders.
- Translation und Rotation durch Zwangsbedingung gekoppelt:  $s = d\alpha$  bzw.  $\alpha = s/d$ .
- Parametrisiere Massenelemente des Zylinders in zwei Koordinatensystemen:

\* Zylindersystem:  $\mathbf{r}$  (System in dem Zylinder ruht, sein Schwerpunkt ist im Ursprung, d.h.  $\mathbf{R} = 0$ ).

\* Laborsystem:  $\mathbf{r}'$  (Schwerpunkt des Zylinders  $\mathbf{R}' = s(+\cos(\beta), 0, -\sin(\beta))$ ).

\* Damit

$$\mathbf{r}'(s, \alpha) = \mathbf{R}' + \mathcal{R}_y(\alpha)\mathbf{r} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}'(s, \alpha) = \dot{\mathbf{R}}' + \frac{d\mathcal{R}_y(\alpha)}{d\alpha}\dot{\alpha}\mathbf{r} \tag{312}$$

mit

$$\mathcal{R}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} +\cos(\alpha) & 0 & +\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & +\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{313}$$

wobei  $\mathbf{r}$  ein festgehaltener, d.h. zeitunabhängiger Punkt im Zylindersystem ist.

- Kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
T &= \int_V d^3r \frac{\rho_0 \dot{\mathbf{r}}'^2}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\left( \rho_0 \int_V d^3r \right)}_{=M} \dot{\mathbf{R}}'^2 + \dot{\mathbf{R}}' \frac{d\mathcal{R}_y(\alpha)}{d\alpha} \dot{\alpha} \underbrace{\left( \rho_0 \int_V d^3r \mathbf{r} \right)}_{=M\mathbf{R}=0} \\
&\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\left( \rho_0 \int_V d^3r \mathbf{r}^T \left( \frac{d\mathcal{R}_y(\alpha)}{d\alpha} \right)^T \frac{d\mathcal{R}_y(\alpha)}{d\alpha} \mathbf{r} \right)}_{=J} \dot{\alpha}^2 = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}'^2}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2}_{\text{Rotation}} = \\
&= \frac{1}{2} \left( M + \frac{J}{d^2} \right) \dot{s}^2 \tag{314}
\end{aligned}$$

( $\int_V d^3r$ : Integration über Zylindervolumen;  $\rho_0$ : Dichte des Zylinders;  $J$ : Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich  $y$ -Achse).

- Trägheitsmoment:

$$J = \rho_0 \int_V d^3r (x^2 + z^2) = \rho_0 \int_0^d dr r \int_0^{2\pi} \varphi \int_{-H/2}^{+H/2} dy r^2 = \frac{\pi \rho_0 d^4 H}{2} = \frac{M d^2}{2} \tag{315}$$

( $H$ : Zylinderhöhe [am Ende irrelevant]).

- Damit

$$T = \frac{3}{4} M \dot{s}^2. \tag{316}$$

- Potentielle Energie:

$$V = \int_V d^3r \rho_0 g z' = \dots = M g R'_z = -M g s \sin(\beta).$$

- Energieerhaltung:

$$T + V = \frac{3}{4} M \dot{s}^2 - M g s \sin(\beta) = E = \text{const.} \tag{317}$$

- “Newtonsche BGl” durch Ableiten nach  $t$ :

$$\frac{3}{2} M \dot{s} \ddot{s} - M g \dot{s} \sin(\beta) = 0 \quad \text{bzw.} \quad M \ddot{s} = \frac{2}{3} M g \sin(\beta). \tag{318}$$

- Zum Vergleich Newtonsche BGl eines Massenpunkts der Masse  $M$ , der diese Ebenen hinuntergleitet:

$$M \ddot{s} = M g \sin(\beta), \tag{319}$$

d.h. Massenpunkt erfährt größere Beschleunigung hangabwärts, weil potentielle Energie bei Umwandlung in kinetische Energie vollständig für Translation verwendet wird und sich nicht auf Translation und Rotation aufteilt.