Klausur zu "Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden"

23. Februar 2022

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Theoretische Physik

5 Aufgaben mit insgesamt **50** Punkten. Die Klausur ist mit **25** oder mehr Punkten bestanden.

Name: ____________________________

Matrikelnummer: ____________________________

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
Gesamt	
Note	

Aufgabe 1 (4.5+5.5+1+3=14 Punkte)

Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich in 1 Raumdimension im Potential

$V(x) = -\alpha x^2 + \beta x^4$,

wobei $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.

(a) Bestimme die Minima und Maxima des Potentials (sowohl die x-Werte als auch die zugehörigen V-Werte) und skizziere das Potential.

(b) Bestimme die Umkehrpunkte für vorgegebene Gesamtenergie E. Trage die Umkehrpunkte in Deine Skizze aus Teilaufgabe (a) ein. Diskutiere die möglichen Trajektorien an Hand der Skizze qualitativ, d.h. beschreibe den jeweils zugehörigen Bewegungsverlauf in Worten, ohne die entsprechende Trajektorie auszurechnen. Betrachte in der gesamten Teilaufgabe (b) die beiden Fälle $E < 0$ und $E > 0$ separat (der Grenzfall $E = 0$ kann dabei außer Acht gelassen werden).

(c) Gib die Newtonsche Bewegungsgleichung zur Bestimmung der Trajektorie $x(t)$ an.

(d) Berechne, ausgehend von der Newtonschen Bewegungsgleichung aus Teilaufgabe (c), die Trajektorie $x(t)$ näherungsweise in der Gegend von $x \approx 0$, d.h. für kleine $|x|$, durch Taylor-Näherung der Kraft in führender nicht-verschwindender Ordnung. Bestimme zunächst die Trajektorie allgemein, d.h. mit unbestimmten Konstanten, dann für den speziellen Satz von Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$.

Lösung 1(a)

$$\frac{dV}{dx} = -2\alpha x + 4\beta x^3 = -2x\left(\alpha - 2\beta x^2\right) = 0. \tag{1}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -2\alpha + 12\beta x^2. \tag{2}$$

Extrema bei $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{\alpha/2\beta}$. Über zweite Ableitung folgt:

$$V''(0) = -2\alpha < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \tag{3}$$

$$V''(\pm\sqrt{\alpha/2\beta}) = -2\alpha + 12\beta\frac{\alpha}{2\beta} = 4\alpha > 0 \Rightarrow \text{Minima} \tag{4}$$

Damit Maximum bei $x = 0$ mit $V(0) = 0$ und Minima bei $x = \pm\sqrt{\alpha/2\beta}$ mit

$V(\pm\sqrt{\alpha/2\beta}) = -\alpha^2/4\beta$.

Skizze!

Lösung 1(b)

$$V(x) = -\alpha x^2 + \beta x^4 = E \tag{5}$$

ist quadratische Gleichung in x^2 mit Lösungen

$$x^2 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta E}}{2\beta}. \tag{6}$$

- Fall $E < 0$:
  4 Umkehrpunkte bei

  $$x = \pm\left(\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta E}}{2\beta}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

  Damit Oszillation des Massenpunkts entweder im linken oder im rechten Topf.

- Fall $E > 0$:
  2 Umkehrpunkte bei

  $$x = \pm\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta E}}{2\beta}\right)^{1/2}. \tag{8}$$

  Damit Oszillation des Massenpunkts, die beide Töpfe einschließt, maximale Geschwindigkeit tief in den Töpfen, langsamere Bewegung nahe des lokalen Potentialmaximums bei $x = 0$.

Skizze!

Lösung 1(c)

$$m\ddot{x} = -\frac{d}{dx}V(x) = 2\alpha x - 4\beta x^3. \tag{9}$$

Lösung 1(d)

Taylor-Näherung:

$$m\ddot{x} \approx 2\alpha x. \tag{10}$$

Allgemeine Lösung über Exponentialansatz oder durch scharfes Hinschauen (bis auf Vorzeichen ist Gleichung (10) die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators):

$$x(t) = Ae^{+\lambda t} + Be^{-\lambda t} \tag{11}$$

mit $\lambda = \sqrt{2\alpha/m}$ und unbestimmten Konstanten A und B.

Lösung für vorgegebene Anfangsbedingungen:

- $x(0) = A + B = 0$, d.h. $B = -A$.
- $\dot{x}(0) = (A - B)\lambda = 2A\lambda = v_0$, d.h. $A = v_0/2\lambda$.
- Endergebnis: $x(t) = v_0(e^{+\lambda t} - e^{-\lambda t})/2\lambda$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Berechne das Trägheitsmoment einer Hohlkugel mit innerem Radius R_1, äußerem Radius R_2 und räumlich konstanter Massendichte ρ_0 bezüglicher einer Achse, die durch das Zentrum der Hohlkugel verläuft.

Hinweis:

$$\int_0^\pi d\vartheta\, \sin^3(\vartheta) = \frac{4}{3}.$$

Lösung 2

Setze Ursprung des Koordinatensystems ins Zentrum der Hohlkugel, berechne Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse:

$$J = \int d^3r\, \rho(\mathbf{r}) \Big(x^2 + y^2 \Big). \tag{12}$$

Verwende Kugelkoordinaten: $(x, y, z) = r(\sin(\vartheta)\cos(\varphi), \sin(\vartheta)\sin(\varphi), \cos\vartheta)$.

Damit $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2(\vartheta)$.

$$\begin{aligned} J = \int_{R_1}^{R_2} dr\, r^2 \int_0^\pi d\vartheta\, \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho_0 r^2 \sin^2(\vartheta) = \rho_0 \underbrace{\int_{R_1}^{R_2} dr\, r^4}_{=(R_2^5 - R_1^5)/5} \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta\, \sin^3(\vartheta)}_{=4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} = \\ = \frac{8\pi\rho_0(R_2^5 - R_1^5)}{15} \end{aligned} \tag{13}$$

(hierbei wurde die aus der Vorlesung für Kugelkoordinaten bekannte Jacobi-Determinante $r^2\sin(\vartheta)$ verwendet).

Aufgabe 3 (2+1+2+5+2=12 Punkte)

Betrachte in 3 Raumdimensionen ein Zweiteilchensystem, bei dem beide Teilchen die gleiche Masse besitzen, d.h. $m_1 = m_2 = m$. Die von Teilchen 1 auf Teilchen 2 wirkende Kraft ist $\mathbf{F}_{1\to 2} = F(r)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, wobei $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ die jeweiligen Teilchenpositionen bezeichnen und $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. Es liegen keine äußeren Kräfte vor.

(a) Wie lautet die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 wirkende Kraft $\mathbf{F}_{2\to 1}$? Begründe Deine Antwort.

(b) Gib die Newtonschen Bewegungsgleichungen für beide Teilchen an.

(c) Gib die Definition von Schwerpunktkoordinaten $\mathbf{R}$ und von Relativkoordinaten $\mathbf{r}$ für dieses Zweiteilchensystem an.

(d) Leite ausgehend von den Newtonschen Bewegungsgleichungen aus Teilaufgabe (b) äquivalente Bewegungsgleichungen in den Schwerpunkt- und Relativkoordinaten aus Teilaufgabe (c) her. Deine Rechenschritte müssen dabei klar nachvollziehbar sein. Lediglich die resultierenden Bewegungsgleichungen anzugeben, ist nicht ausreichend. Begründe anhand Deiner Ergebnisse, dass die Bewegungsgleichungen für die Schwerpunktkoordinaten von denen für die Relativkoordinaten entkoppelt sind

(e) Gib die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für die Schwerpunktkoordinaten an.

Lösung 3(a)

$\mathbf{F}_{2\to 1} = -\mathbf{F}_{1\to 2} = F(r)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ (3. Newtonsches Axiom, Kraft gleich Gegenkraft) .

Lösung 3(b)

$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{2\to 1}$, $m\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{1\to 2}$.

Lösung 3(c)

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2 \tag{14}$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{15}$$

(oder auch umgekehrtes Vorzeichen bei Relativkoordinaten, d.h. beide Konventionen o.k.).

Lösung 3(d)

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}_1 + \ddot{\mathbf{r}}_2}{2} = \frac{\mathbf{F}_{2\to 1} + \mathbf{F}_{1\to 2}}{2m} = 0 \tag{16}$$

(im letzten Schritt wurde das Ergebnis aus Teilaufgabe (a) verwendet).

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}_{2\to1} - \mathbf{F}_{1\to2}}{m} = \frac{2\mathbf{F}_{2\to1}}{m} = \frac{2F(r)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m} = \frac{2F(|\mathbf{r}|)\mathbf{r}}{m} \tag{17}$$

(hier wurde ebenfalls das Ergebnis aus Teilaufgabe (a) verwendet).

Die Gleichungen sind entkoppelt, da in Gleichung (16) nur $\mathbf{R}$ und in Gleichung (17) nur $\mathbf{r}$ auftritt.

Lösung 3(e)

Freie Bewegungsgleichung: $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t$ mit 6 unbestimmten Konstanten in den Vektoren $\mathbf{R}_0$ und $\mathbf{V}_0$.

Aufgabe 4 (5+5+2=12 Punkte)

Betrachte in 2 Raumdimensionen das Kraftfeld $\mathbf{F} = \alpha(-2y, +x)$.

(a) Berechne die Arbeit, die bei einer geradlinigen Bewegung durch das Kraftfeld vom Punkt $\mathbf{r}_0 = (0,0)$ zum Punkt $\mathbf{r}_1 = L(1,1)$ verrichtet wird.

(b) Berechne die Arbeit, die bei einer Bewegung durch das Kraftfeld vom Punkt $\mathbf{r}_0 = (0,0)$ zum Punkt $\mathbf{r}_1 = L(1,1)$ entlang des durch $y(x) = x^2/L$ definierten Weges verrichtet wird.

(c) Handelt es sich beim Kraftfeld $\mathbf{F}$ um ein konservatives Kraftfeld? Begründe Deine Antwort.

Lösung 4(a)

Parametrisiere Weg durch x, d.h. $\mathbf{r}(x) = (x, y(x)) = (x, x)$. Damit

$$\frac{d\mathbf{r}}{dx} = (1,1). \tag{18}$$

Verrichtete Arbeit:

$$W_{(\mathrm{a})} = -\int_{\text{Weg (a)}} d\mathbf{r}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\int_0^L dx\,\frac{d\mathbf{r}}{dx}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\int_0^L dx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} -2x \\ x \end{pmatrix} = \alpha \int_0^L dx\, x = \\ = \frac{\alpha L^2}{2}. \tag{19}$$

Lösung 4(b)

Parametrisiere Weg durch x, d.h. $\mathbf{r}(x) = (x, y(x)) = (x, x^2/L)$ Damit

$$\frac{d\mathbf{r}}{dx} = (1, 2x/L). \tag{20}$$

Verrichtete Arbeit:

$$W_{(\mathrm{b})} = -\int_{\text{Weg (b)}} d\mathbf{r}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\int_0^L dx\,\frac{d\mathbf{r}}{dx}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\int_0^L dx \begin{pmatrix} 1 \\ 2x/L \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} -2x^2/L \\ x \end{pmatrix} = 0. \tag{21}$$

Lösung 4(c)

Da die verrichtete Arbeit gemäß Teilaufgabe (a) und Teilaufgabe (b) wegabhängig ist, kann das Kraftfeld nicht konservativ sein.

<u>oder</u>

Alternativ kann hier auch die Rotation ausgerechnet werden, $\partial F_y/\partial_x - \partial F_x/\partial_y = 3\alpha$. da diese nicht verschwindet, ist das Kraftfeld nicht konservativ .

Aufgabe 5 (5+2=7 Punkte)

Betrachte ein Teilchen in 3 Raumdimensionen (Masse m, Position $\mathbf{r}$), das sich in einem Zentralpotential $V(|\mathbf{r}|)$ bewegt.

(a) Zeige durch explizite Rechnung, dass der Drehimpuls $\mathbf{l}$ des Teilchens erhalten ist.

(b) Bestimme die z-Komponente der Trajektorie des Teilchens für $V(|\mathbf{r}|) = \alpha|\mathbf{r}|^4$ und Drehimpuls $\mathbf{l} = (0, 0, l)$ (wobei $l \neq 0$ und konstant ist). Die ausschließliche Angabe des Ergebnisses ist nicht ausreichend. Deine Rechenschritte und/oder Argumente müssen schlüssig und klar nachvollziehbar sein.

Lösung 5(a)

Drehimpuls: $\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.

Zeitableitung des Drehimpulses:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{22}$$

Kraft im Zentralpotential $V(|\mathbf{r}|)$:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(|\mathbf{r}|) = -V'(|\mathbf{r}|)\nabla|\mathbf{r}| = -V'(|\mathbf{r}|)\hat{\mathbf{r}}. \tag{23}$$

Damit

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = -V'(|\mathbf{r}|)\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} = 0, \tag{24}$$

d.h. der Drehimpulsvektor verändert sich nicht mit fortschreitender Zeit.

Lösung 5(b)

Da $\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = (0, 0, l) = \text{const}$, muss $\mathbf{r}$ stets senkrecht zum konstanten Drehimpulsvektor $(0, 0, l)$ stehen , d.h. $z(t) = 0$.