Klausur zu "Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden"

18. März 2022

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Theoretische Physik

5 Aufgaben mit insgesamt **50** Punkten. Die Klausur ist mit **25** oder mehr Punkten bestanden.

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
Gesamt	
Note	

Aufgabe 1 (2+3+2.5+4.5=12 Punkte)

Ein Massenpunkt (Masse m, Position $\mathbf{r} = (x, y, z)$) bewegt sich in 3 Raumdimensionen unter Einfluss der Kraft

$$\mathbf{F} = -m \begin{pmatrix} \omega_x^2 x \\ \omega_y^2 y \\ \omega_z^2 z \end{pmatrix}$$

(mit $\omega_x \geq 0$, $\omega_y \geq 0$, $\omega_z \geq 0$).

(a) Berechne $\operatorname{rot} \mathbf{F}$. Schließe aus Deinem Ergebnis, unter welchen Bedingungen an ω_x, ω_y und ω_z die Energie erhalten ist.

(b) Berechne die Ableitung des Drehimpulses $\mathbf{l}$ (bezüglich des Koordinatenursprungs) nach der Zeit. Schließe aus Deinem Ergebnis, unter welchen Bedingungen an ω_x, ω_y und ω_z der Drehimpuls erhalten ist.

(c) Gib die zugehörige Newtonsche Bewegungsgleichung sowie deren allgemeine Lösung an.

(d) Betrachte nun den Spezialfall $\omega_x = \omega_y = \omega_z$ und bestimme die Trajektorie für die Anfangsbedingungen $\mathbf{l}(t = 0) = (0, 0, l_0)$ (mit $l_0 > 0$), $x(t = 0) = x_0$, $\dot{x}(t = 0) = v_0$ und $\dot{y}(t = 0) = 0$.

Lösung 1(a)

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0. \tag{1}$$

Da das Kraftfeld für beliebige ω_x, ω_y und ω_z konservativ ist, ist die Energie unabhängig von ω_x, ω_y und ω_z stets erhalten .

Lösung 1(b)

$$\dot{\mathbf{l}} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} yz(\omega_z^2 - \omega_y^2) \\ zx(\omega_x^2 - \omega_z^2) \\ xy(\omega_y^2 - \omega_x^2) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Der Drehimpuls ist folglich erhalten, falls $\omega_x = \omega_y = \omega_z$.

Lösung 1(c)

Newtonsche Bewegungsgleichung: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -m \begin{pmatrix} \omega_x^2 x \\ \omega_y^2 y \\ \omega_z^2 z \end{pmatrix}$.

Allgemeine Lösung: $r_j(t) = A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t)$, $j = 1, 2, 3$, mit 6 unbestimmten Konstanten A_j und B_j.

Lösung 1(d)

Aufgrund von $\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ (und $\mathbf{l} \neq 0$) muss sowohl $\mathbf{r}(0)$ als auch $\dot{\mathbf{r}}(0)$ senkrecht zu $\mathbf{l}$ sein . Damit $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = 0$.

Außerdem gilt $l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ und damit $l_0 = -my(0)v_0$, d.h. $y(0) = -l_0/mv_0$.

Werte allgemeine Lösung aus Teilaufgabe 1(c) und deren Zeitableitung bei $t = 0$ aus:
$\mathbf{r}(0) = \mathbf{A}$,
$\dot{\mathbf{r}}(0) = \omega_x \mathbf{B}$.

Damit können $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ sowie die Trajektorie angegeben werden:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ -l_0/mv_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_x t) + \begin{pmatrix} v_0/\omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\omega_x t). \tag{3}$$

<u>Alternativ:</u>

$$x(0) = B_x = x_0 \tag{4}$$

$$\dot{x}(0) = A_x \omega_x = v_0 \;\Rightarrow\; A_x = \frac{v_0}{\omega_x} \tag{5}$$

$$\dot{y}(0) = A_y \omega_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 0 \tag{6}$$

Außerdem:

$$\mathbf{l} = m \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{l}(0) = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} y(0)\dot{z}(0) \\ z(0)v_0 - x_0\dot{z}(0) \\ -y(0)v_0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Diese drei Gleichungen liefern:

$$y(0) = -\frac{l_0}{mv_0} = B_y \tag{8}$$

$$\dot{z}(0) = 0 \Rightarrow A_z = 0 \tag{9}$$

$$z(0) = 0 = B_z \tag{10}$$

was die gleiche Trajektorie wie oben ergibt .

Aufgabe 2 (1+4+6=11 Punkte)

Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich in 1 Raumdimension im Potential $V(x) = \alpha \sin(x/\beta)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet er sich bei $x = 0$ und hat die Geschwindigkeit v_0. Im Folgenden soll die Bewegung des Massenpunkts für kleine $|t|$ näherungsweise berechnet werden.

(a) Bestimme zunächst die Taylor-Näherung von $V(x)$ um die Entwicklungsstelle $x = 0$ bis zur ersten nicht-verschwindenden Ordnung.

(b) Berechne die Trajektorie des Massenpunkts $x(t)$ näherungsweise für kleine $|t|$. Gehe dazu wie folgt vor:

  i) Gib die Newtonsche Bewegungsgleichung an, wobei Du die Kraft aus dem genäherten Potential aus Teilaufgabe (a) bestimmst.

  ii) Gib die allgemeine Lösung dieser Bewegungsgleichung an.

  iii) Passe die unbestimmten Konstanten der allgemeinen Lösung an die oben vorgegebenen Anfangsbedingungen an und gib die entsprechende Trajektorie an.

(c) Berechne erneut die Trajektorie des Massenpunkts $x(t)$ näherungsweise für kleine $|t|$. Verwende nun aber die Energieerhaltung sowie die Technik "Trennung der Variablen", wobei Du die oben vorgegebene Anfangsbedingung $x(t = 0) = 0$ direkt über die Verwendung geeigneter Integrationsgrenzen realisierst.
Hinweis:

$$\int dx \, \frac{1}{\sqrt{1 - ax}} = -\frac{2\sqrt{1 - ax}}{a} + \text{const.}$$

Lösung 2(a)

$V(x) \approx \alpha x/\beta$.

Lösung 2(b)

$F(x) = -(d/dx)V(x) \approx -\alpha/\beta$.

Newtonsche Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} \approx -\alpha/\beta$.

Allgemeine Lösung: $x(t) = (-\alpha/2m\beta)t^2 + At + B$ (wobei A und B unbestimmte Konstanten sind).

Aus $x(t = 0) = 0$ folgt $B = 0$.

Aus $\dot{x}(t) = (-\alpha/m\beta)t + A$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$ folgt $A = v_0$.

Damit $x(t) = (-\alpha/2m\beta)t^2 + v_0 t$.

Lösung 2(c)

Energieerhaltung:

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = E \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}. \tag{11}$$

Trennung der Variablen:

$$dx \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = \pm dt \tag{12}$$

$$\int_0^x dx' \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}} = \pm \int_0^t dt' \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\int_0^x dx' \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \alpha x'/\beta)}} &= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^x dx' \, \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha x'/E\beta}} = -\sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{2\sqrt{1 - \alpha x'/E\beta}}{\alpha/E\beta}\Bigg|_0^x = \\ &= -\sqrt{\frac{2mE\beta^2}{\alpha^2}} \sqrt{1 - \alpha x'/E\beta}\Bigg|_0^x = \pm t \end{aligned} \tag{14}$$

$$\sqrt{1 - \alpha x/E\beta} = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{2mE\beta^2}} t + 1 \tag{15}$$

$$1 - \alpha x/E\beta = \frac{\alpha^2}{2mE\beta^2} t^2 \pm \sqrt{\frac{2\alpha^2}{mE\beta^2}} t + 1 \tag{16}$$

$$x = -\frac{\alpha}{2m\beta} t^2 \pm \sqrt{\frac{2E}{m}} t. \tag{17}$$

Da E erhalten ist, gilt $E = E(t = 0) = mv_0^2/2$. Damit

$$x = -\frac{\alpha}{2m\beta} t^2 \pm v_0 t. \tag{18}$$

Für Anfangsbedingung $\dot{x}(t = 0) = v_0$ ist $\pm$ durch $+$ zu ersetzen ($-$ entspräche Anfangsbedingung $\dot{x}(t = 0) = -v_0$). Damit gleiches Ergebnis wie in Teilaufgabe 2(b),

$$x = -\frac{\alpha}{2m\beta} t^2 + v_0 t. \tag{19}$$

Aufgabe 3 (1+4+5=10 Punkte)

Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich in 1 Raumdimension. Auf ihn wirkt eine vom Koordinatenursprung abstoßende Kraft $F_a = m\gamma^2 x$ sowie die lineare Reibungskraft $F_r = -2m\alpha\dot{x}$.

(a) Gib die Newtonsche Bewegungsgleichung an.

(b) Bestimme die allgemeine Lösung dieser Bewegungsgleichung mit Hilfe eines Exponentialansatzes.

(c) Betrachte nun den Spezialfall, bei dem $\gamma^2 = 3\alpha^2$ gilt und sich der Massenpunkt bei $t = 0$ am Raumpunkt $x = x_0$ befindet. Wie muss die Geschwindigkeit $v_0 = \dot{x}(t = 0)$ gewählt werden, damit der Massenpunkt im Grenzfall $t \to \infty$ den Koordinatenursprung $x = 0$ erreicht?

Lösung 3(a)

$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} - \gamma^2 x = 0$.

Lösung 3(b)

Exponentialansatz $x = e^{\lambda t}$ (weitere für richtiges Einsetzen des Ansatzes) liefert $\lambda^2 + 2\alpha\lambda - \gamma^2 = 0$.

Damit $\lambda_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$.

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung ergibt sich über lineare Superposition,
$x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}$.

Lösung 3(c)

Spezialfall $\gamma^2 = 3\alpha^2$: $\lambda_+ = \alpha$, $\lambda_- = -3\alpha$.

Es folgt
$x(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-3\alpha t}$,
$\dot{x}(t) = A\alpha e^{\alpha t} - 3B\alpha e^{-3\alpha t}$.

Damit der Massenpunkt im Grenzfall $t \to \infty$ den Koordinatenursprung $x = 0$ erreicht, muss $A = 0$ gelten , d.h. $x(t = 0) = B = x_0$,
$\dot{x}(t) = -3B\alpha = -3x_0\alpha = v_0$,
d.h. die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 muss $v_0 = -3x_0\alpha$ sein.

Aufgabe 4 (3+3+3=9 Punkte)

Eine Kugel mit Radius R und konstanter Massendichte ρ_0 ist im Koordinatenursprung zentriert.

(a) Gib einen Integralausdruck in kartesischen Koordinaten (x, y, z) für das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich einer Achse durch den Koordinatenursprung an.

(b) Gib einen Integralausdruck in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) für das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich einer Achse durch den Koordinatenursprung an.

(c) Berechne das Trägheitsmoment, indem Du entweder Deine in Teilaufgabe (a) oder Teilaufgabe (b) angegebenen Integrale löst.

Hinweis:

$$\int_0^{\pi} d\vartheta \, \sin^3(\vartheta) = \frac{4}{3}.$$

Lösung 4(a)

$$J = \int_{-R}^{+R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \, \rho_0 \Big(x^2 + y^2\Big). \tag{20}$$

Lösung 4(b)

$$J = \int_0^R dr \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \sin(\vartheta)\rho_0 r^2 \Big(1 - \cos^2(\vartheta)\Big). \tag{21}$$

Lösung 4(c)

Löse Integrale aus Teilaufgabe (b):

$$J = \underbrace{\rho_0 \int_0^R dr \, r^4}_{=R^5/5} \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \, \sin^3(\vartheta)}_{=4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} = \frac{8\pi\rho_0 R^5}{15}. \tag{22}$$

Aufgabe 5 (4+4=8 Punkte)

Betrachte die Koordinaten u und v die gemäß

$$u = x \quad , \quad v = x + 2y$$

definiert sind (x und y bezeichnen die üblichen kartesischen Koordinaten) und einen zulässigen Koordinatensatz zur Beschreibung des 2-dimensionalen Raums bilden.

(a) Drücke die kinetische Energie eines Massenpunkts (Masse m) vollständig in den Koordinaten u und v aus.

(b) Berechne die Jacobi-Determinante, die erforderlich ist, um ein Integral $\int dx \int dy$ in ein Integral $\int du \int dv$ umzuschreiben.

Lösung 5(a)

$y = (v - x)/2 = (v - u)/2$.

Damit $\mathbf{r} = (x, y) = (u, (v - u)/2)$ und $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{u}, (\dot{v} - \dot{u})/2)$.

Kinetische Energie:

$$\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{8}\Big(5\dot{u}^2 + \dot{v}^2 - 2\dot{u}\dot{v}\Big). \tag{23}$$

Lösung 5(b)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 0 \qquad , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2} \qquad , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2} \quad . \tag{24}$$

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2} \quad . \tag{25}$$