Klausur zu "Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik"

1. August 2016

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Theoretische Physik

5 Aufgaben mit insgesamt 25 Punkten. Die Klausur ist mit $12\frac{1}{2}$ oder mehr Punkten bestanden.

Aufgabe 1 (1+2=3 Punkte)

(a) Ein Astronaut fliegt mit einer Rakete mit konstanter Geschwindigkeit (Geschwindigkeitsbetrag $v = (\sqrt{3}/2)c$; c ist die Lichtgeschwindigkeit) an der Erde vorbei. Die Rakete hat in Flugrichtung aus Sicht des Astronauten die Länge L. Berechne die Länge der Rakete in Flugrichtung im System der Erde.

(b) Der Astronaut fliegt nun von der Erde mit konstanter Geschwindigkeit (Geschwindigkeitsbetrag u) zu einem entfernten Stern und dann unmittelbar auf gleichem Weg und mit gleichem Betrag der Geschwindigkeit u wieder zurück. Berechne u für den Fall, dass der Astronaut während seiner Reise um 1 Jahr, seine Freunde auf der Erde dagegen um 4 Jahre gealtert sind. Wie weit ist der Stern aus Sicht eines Beobachters auf der Erde von der Erde entfernt?

Aufgabe 2 (1+1+1+1=4 Punkte)

Gegeben ist die Weltlinie eines relativistischen Teilchens in einer Raumdimension, $x^\mu = (ct, a\sin(2\pi t/t_0))$, parametrisiert durch die Zeit t mit $0 \leq t \leq t_0$ ($a > 0$ und $t_0 > 0$ sind Konstanten; c ist die Lichtgeschwindigkeit).

(a) Skizziere die Weltlinie in einem Raumzeitdiagramm.

(b) Welche Einschränkung an a und t_0 besteht für eine physikalisch sinnvolle Weltlinie, die eine Bewegung mit maximal Lichtgeschwindigkeit beschreibt?

(c) Gib einen Integralausdruck für die zwischen Anfangspunkt (charakterisiert durch $t = 0$) und Endpunkt (charakterisiert durch $t = t_0$) verstrichene Eigenzeit τ des Teilchens an.

(d) Berechne die Eigenzeit τ für den Fall $2\pi a/t_0 = c$.

Aufgabe 3 (1+2+1+2+1=7 Punkte)

Ein Teilchen (Masse m) bewegt sich kräftefrei auf einer Zylinderfläche (Radius R, die Symmetrieachse des Zylinders entspricht der z-Achse). Verwende als generalisierte Koordinaten (φ, z) entsprechend der folgenden Abbildung.

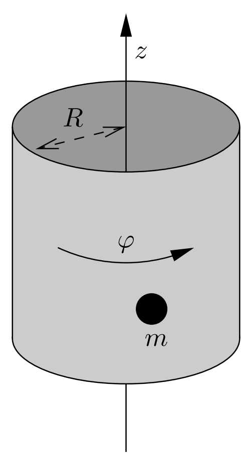
(a) Drücke die kartesischen Koordinaten durch die generalisierten Koordinaten aus, d.h. gib $x(\varphi, z)$, $y(\varphi, z)$ und $z(\varphi, z)$ an.

(b) Bestimme den metrischen Tensor des Zylinders, g_{jk}, $j, k \in \{\varphi, z\}$.

(c) Gib die kinetische Energie T und die Lagrange-Funktion L an.

(d) Bestimme die Bewegungsgleichungen des Teilchens mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.

(e) Zeige, dass der Drehimpuls bezüglich der z-Achse eine Erhaltungsgröße ist.



Aufgabe 4 (1+1+1+1=4 Punkte)

Betrachte ein Teilchen (Masse m) in zwei Raumdimensionen. Verwende im Folgenden Polarkoordinaten (r, φ). Das Teilchen bewegt sich im nicht näher spezifizierten Potential $V(r, \varphi)$.

(a) Gib die Lagrange-Funktion L an.

(b) Berechne die kanonisch konjugierten Impulse p_r und p_φ.

(c) Bestimme die Hamilton-Funktion H ausgehend von L mit Hilfe einer Legendre-Transformation.

(d) Berechne die Poisson-Klammer $\{p_\varphi, H\}$. Bestimme daraus, unter welcher Bedingung an V der kanonisch konjugierte Impuls p_φ zeitlich erhalten ist.

Aufgabe 5 (1+2+3+1=7 Punkte)

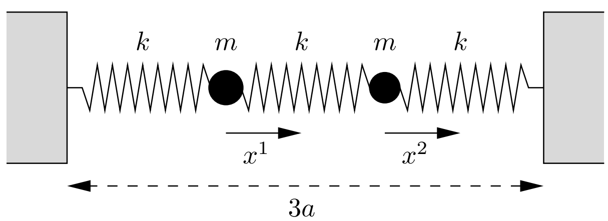
Zwei Massenpunkte (Masse jeweils m) bewegen sich in einer Raumimension und sind mit drei identischen Federn die dem Hookschen Gesetz genügen (Ruhelänge jeweils a, Federkonstante jeweils k) miteinander und mit zwei Wänden im Abstand $3a$ verbunden (siehe Abbildung). Betrachte im Folgenden kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage.

(a) Gib die Lagrange-Funktion L an. Verwende dabei generalisierte Koordinaten x^1 und x^2, die die jeweiligen Auslenkungen der Massenpunkte aus der Gleichgewichtslage beschreiben.

(b) Wie lautet die Massenmatrix M und die Kraftmatrix K? Wie lauten die Bewegungsgleichungen für x^1 und x^2?

(c) Bestimme die Normalschwingungen des Systems und gib die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen an.

(d) Bestimme die spezielle Lösung der Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $(x^1(t=0), x^2(t=0)) = (\Delta x, \Delta x)$, $(\dot{x}^1(t=0), \dot{x}^2(t=0)) = (0, 0)$.



Lösung 1(a)

$$L' \;=\; L/\gamma \;=\; \sqrt{1-v^2/c^2}\,L \;=\; L/2.$$

Lösung 1(b)

$$\begin{aligned}
4 &= \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\
\to\quad 1-u^2/c^2 &= \frac{1}{16} \\
\to\quad u &= \sqrt{1-\frac{1}{16}}\,c = \frac{\sqrt{15}}{4}c \\
d &= u\times 2\,\mathrm{y} = \frac{\sqrt{15}}{2}\,\mathrm{ly}.
\end{aligned}$$

Lösung 2(b)

$$\begin{aligned}
v &= \frac{dx^1}{dt} = \frac{2\pi a}{t_0}\cos(2\pi t/t_0) \leq c \\
\to\quad \frac{2\pi a}{t_0} &\leq c.
\end{aligned}$$

Lösung 2(c)

$$\tau \;=\; \frac{1}{c}\int_0^{t_0} dt\,\sqrt{(\dot{x}^0)^2-(\dot{x}^1)^2} \;=\; \frac{1}{c}\int_0^{t_0} dt\,\sqrt{c^2-\left(\frac{2\pi a}{t_0}\cos(2\pi t/t_0)\right)^2}.$$

Lösung 2(d)

$$\tau \;=\; \int_0^{t_0} dt\,\sqrt{1-\cos^2(2\pi t/t_0)} \;=\; \int_0^{t_0} dt\,\Big|\sin(2\pi t/t_0)\Big| \;=\; 2\int_0^{t_0/2} dt\,\sin(2\pi t/t_0) \;=\; \frac{2t_0}{\pi}.$$

Lösung 3(a)

$$x \;=\; R\cos(\varphi) \quad,\quad y \;=\; R\sin(\varphi) \quad,\quad z \;=\; z.$$

Lösung 3(b)

$$
\begin{aligned}
g_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = R^2 \\
g_{zz} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 1 \\
g_{\varphi z} &= g_{z\varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 0.
\end{aligned}
$$

Lösung 3(c)

$$
L = T \quad \frac{m}{2}\dot{q}^j g_{jk}\dot{q}^k = \frac{m}{2}\Big(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\Big).
$$

Lösung 3(d)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= mR^2\ddot{\varphi} = 0 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= m\ddot{z} = 0.
\end{aligned}
$$

Lösung 3(e)

φ ist zyklische Variable, daher

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} = \text{const};
$$

$l_z = mR^2\dot{\varphi}$ ist aus Vorlesung bekannt.

Lösung 4(a)

$$
L = \frac{m}{2}\Big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\Big) - V(r,\varphi).
$$

Lösung 4(b)

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Lösung 4(c)

$$H = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V.$$

Lösung 4(d)

$$\{p_\varphi, H\} = \sum_{j=r,\varphi}\left(\frac{\partial p_\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_\varphi}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

p_φ ist zeitlich erhalten, falls V unabhängig von φ, also $V = V(r)$.

Lösung 5(a)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2)^2 - \frac{1}{2}k(x^1)^2 - \frac{1}{2}k(x^2)^2 - \frac{1}{2}k(x^2 - x^1)^2.$$

Lösung 5(b)

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad , \quad K = \begin{pmatrix} +2k & -k \\ -k & +2k \end{pmatrix} \\ M\ddot{\mathbf{X}} + K\mathbf{X} &= 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{X} = (x^1, x^2). \end{aligned}$$

Lösung 5(c)

$$\det\Big(-M\omega_j^2 + K\Big) = (m\omega_j^2)^2 - 4k(m\omega_j^2) + 3k^2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \quad m\omega_j^2 &= (2 \pm 1)k \\
\Big(-M\omega_j^2 + K\Big)\mathbf{a}_j &= \begin{pmatrix} -m\omega_j^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega_j^2 + 2k \end{pmatrix} \mathbf{a}_j = 0 \\
\rightarrow \quad \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix} \\
\rightarrow \quad \omega_2 &= \sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{X} &= \sum_{j=1}^{2} \mathbf{a}_j \Big(A_j e^{+i\omega_j t} + B_j e^{-i\omega_j t}\Big).
\end{aligned}
$$

Lösung 5(d)

$$
\mathbf{X} = \Delta x \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{k/m}t).
$$