
Klausur zu “Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik”

30. September 2016

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Theoretische Physik

5 Aufgaben mit insgesamt 25 Punkten. Die Klausur ist mit $12\frac{1}{2}$ oder mehr Punkten bestanden.

Aufgabe 1 (1+1+1+1=4 Punkte)

Gegeben ist der Raumzeitvektor

$$x^\mu = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im Inertialsystem Σ .

- Berechne den Raumzeitabstand von x^μ zum Ursprung, d.h. $x^\mu x_\mu$.
- Das Inertialsystem Σ' bewegt sich in Σ mit Geschwindigkeit $v = c/2$ (c ist die Lichtgeschwindigkeit) in positive x -Richtung. Gib die Boost-Matrix $\Lambda^\mu{}_\nu$ an, mit der Vierervektoren in Σ (z.B. x^μ) in Vierervektoren in Σ' (z.B. x'^μ) transformiert werden können.
- Berechne mit der in (b) angegebenen Matrix x'^μ .
- Berechne den Raumzeitabstand von x'^μ zum Ursprung, d.h. $x'^\mu x'_\mu$.

Aufgabe 2 (1+2+2=5 Punkte)

Betrachte den relativistischen Zerfallsprozess $A \rightarrow B + C$, d.h. ein Teilchen A (Masse $m_A > 0$) zerfällt in ein Teilchen B (Masse $m_B > 0$) und ein Teilchen C (Masse $m_C > 0$).

- Wie lautet die diesem Prozess entsprechende Viererimpulserhaltung? Um wie viele Gleichungen handelt es sich?
- Betrachte den speziellen Fall $2m_B = m_C$. Berechne ausgehend von der Viererimpulserhaltung die Energie E_B und den Impulsbetrag $|\mathbf{p}_B|$ von Teilchen B im Ruhesystem von Teilchen A (d.h. E_B und $|\mathbf{p}_B|$ ausgedrückt durch m_A und m_B).

- (c) Betrachte den speziellen Fall $m_B = m_C$ sowie Impulsbetrag $|\mathbf{p}_B| = \sqrt{3}m_{BC}$ von Teilchen B im Ruhesystem von Teilchen C . Berechne ausgehend von der Viererimpulserhaltung die Masse m_A (d.h. m_A ausgedrückt durch m_B).

Aufgabe 3 (1+1+1+1+3=7 Punkte)

Betrachte einen Massenpunkt (Masse m), der sich in 3 Raumdimensionen im Potential $V(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ bewegt.

- (a) Gib die Langrange-Funktion in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) an.
- (b) Betrachte die Transformation
 $z(t) \rightarrow z(s, t) = z(t) + s$
 und berechne mit dem Noether-Theorem die zugehörige Erhaltungsgröße. Um welche physikalische Größe handelt es sich?
- (c) Betrachte die Transformation
 $\varphi(t) \rightarrow \varphi(s, t) = \varphi(t) + s$
 und berechne mit dem Noether-Theorem die zugehörige Erhaltungsgröße. Um welche physikalische Größe handelt es sich?
- (d) Betrachte die Transformation
 $(r(t), \varphi(t), z(t)) \rightarrow (r(s, t), \varphi(s, t), z(s, t)) = (r(s + t), \varphi(s + t), z(s + t))$
 und berechne mit dem Noether-Theorem die zugehörige Erhaltungsgröße. Um welche physikalische Größe handelt es sich?
- (e) Vereinfache die Bestimmung der Trajektorie des Massenpunktes mit den in (b), (c) und (d) gefundenen Erhaltungsgrößen so weit wie möglich, d.h. führe die Bestimmung der Trajektorie auf lediglich zwei Integralausdrücke zurück.
Hinweis: Bestimme zunächst $z(t)$ mit Hilfe der in (b) gewonnenen Erhaltungsgröße. Verwende dann die Erhaltungsgrößen aus (b), (c) und (d), um einen Integralausdruck zur Bestimmung von $r(t)$ und schließlich einen Integralausdruck zur Bestimmung von $\varphi(t)$ anzugeben.

Aufgabe 4 (1+1+3=5 Punkte)

Betrachte zwei Massenpunkte (Massen $m_1 = m_2 = m$), die sich in 1 Raumdimension (Koordinaten x_1 beziehungsweise x_2) in identischen Potentialen $V(x_1)$ beziehungsweise $V(x_2)$,

$$V(x_j) = \lambda(x_j^2 - a^2)^2$$

($\lambda > 0$, $a > 0$), bewegen. Die Massenpunkte sind außerdem mit einer Feder (genügt dem Hookschen Gesetz, Ruhelänge 0, Federkonstante k) gekoppelt.

- (a) Gib die Langrange-Funktion an.

- (b) Skizziere das Potential $V(x_j)$. Gib für den Fall $k = 0$ (d.h. die Feder wird nicht betrachtet) sämtliche Gleichgewichtslagen des Systems an (sowohl stabil als auch instabil).
- (c) Bestimme für den Fall $k > 0$ sämtliche Gleichgewichtslagen des Systems (eine Analyse, ob die Gleichgewichtslagen stabil oder instabil sind, ist nicht erforderlich).

Aufgabe 5 (1+1+2=4 Punkte)

Ein System von zwei Massenpunkten (Massen $m_1 = m_2 = m$), die sich in 1 Raumdimension bewegen (Koordinaten x_1 beziehungsweise x_2) wird durch die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 - V(x_1) - V(x_2) - \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2$$

beschrieben ($k > 0$, $V(x_j)$ wie in Aufgabe 4 definiert). Betrachte im Folgenden kleine Schwingungen des Systems um die stabile Gleichgewichtslage $x_1 = x_2 = +a$. Verwende dazu die Koordinaten $q_j = x_j - a$.

- (a) Nähere die angegebene Lagrange-Funktion quadratisch in den kleinen Auslenkungen q_j , d.h. vernachlässige Terme der Ordnung $\mathcal{O}(q_j^3)$.
- (b) Wie lautet die Massenmatrix M und die Kraftmatrix K ? Wie lauten die Bewegungsgleichungen für q_1 und q_2 ?
- (c) Bestimme die Normalschwingungen des Systems und gib die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen an.

Lösung 1(a)

$$x^\mu x_\mu = \alpha^2(4^2 - 2^2) = 12\alpha^2.$$

Lösung 1(b)

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Lösung 1(c)

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \alpha\gamma(4 - 2\beta, -4\beta + 2, 0, 0) = \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}(3, 0, 0, 0).$$

Lösung 1(d)

$$x'^\mu x'_\mu = \frac{4\alpha^2}{3}9^2 = 12\alpha^2.$$

Lösung 2(a)

$$p_A^\mu = p_B^\mu + p_C^\mu,$$

d.h. 4 Gleichungen.

Lösung 2(b)

$$\begin{aligned} (p_A - p_B)^2 &= (p_C)^2 \\ (p_A)^2 + (p_B)^2 - 2p_A p_B &= (p_C)^2 \\ m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2m_A E_B &= m_C^2 c^2 \\ E_B &= \frac{(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)c^2}{2m_A} = \frac{(m_A^2 - 3m_B^2)c^2}{2m_A} \\ |\mathbf{p}_B| &= \left(\frac{E_B^2}{c^2} - m_B^2 c^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{m_A^4 + 9m_B^4 - 10m_A^2 m_B^2}{4m_A^2} \right)^{1/2} c. \end{aligned}$$

Lösung 2(c)

$$(p_A)^2 = (p_B + p_C)^2$$

$$(p_A)^2 = (p_B)^2 + (p_C)^2 + 2p_B p_C$$

$$m_A^2 c^2 = m_B^2 c^2 + m_C^2 c^2 + 2E_B m_C = m_B^2 c^2 + m_C^2 c^2 + 2\left(m_B^2 c^4 + |\mathbf{p}_B|^2 c^2\right)^{1/2} m_C$$

$$m_A = \left(2m_B^2 + 2\left(m_B^2 + 3m_B^2\right)^{1/2} m_B\right)^{1/2} = \sqrt{6}m_B.$$

Lösung 3(a)

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r).$$

Lösung 3(b)

Transformation: $z(t) \rightarrow z(s, t) = z(t) + s$, lässt L invariant.

Erhaltungsgröße:

$$p_z = \left. \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \right|_{s=0} = m\dot{z} = \text{const.}$$

Lösung 3(c)

Transformation: $\varphi(t) \rightarrow \varphi(s, t) = \varphi(t) + s$, lässt L invariant.

Erhaltungsgröße:

$$l_z = \left. \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \right|_{s=0} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

Lösung 3(d)

Transformation: $(r(t), \varphi(t), z(t)) \rightarrow (r(s, t), \varphi(s, t), z(s, t)) = (r(s+t), \varphi(s+t), z(s+t))$ mit

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t) \right|_{s=0} = \frac{d}{dt} K(t) \quad , \quad K(t) = L(\dot{q}^j, q^j, t).$$

Erhaltungsgröße:

$$E = \left. \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \right|_{s=0} - K(t) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + V(r) = \text{const.}$$

Lösung 3(e)

$$z(t) = \frac{p_z}{m}t + z_0$$

$$\dot{r} = \pm \left(\frac{2}{m} \left(E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{l_z^2}{2mr^2} - V(r) \right) \right)^{1/2}$$

$$\rightarrow \pm \int_{r_0}^r dr' \left(\frac{2}{m} \left(E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{l_z^2}{2mr'^2} - V(r') \right) \right)^{-1/2} = t - t_0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{l_z}{mr(t)^2}$$

$$\rightarrow \varphi(t) - \varphi_0 = \int_{t_0}^t dt' \frac{l_z}{mr^2(t')}$$

Lösung 4(a)

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 - \underbrace{V(x_1) - V(x_2) - \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2}_{=-V(x_1, x_2)}$$

Lösung 4(b)

Gleichgewicht für $x_j \in \{-a, 0, +a\}$, d.h. insgesamt 9 Gleichgewichtslagen.

Lösung 4(c)

Bedingung für Gleichgewicht:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2) = 4\lambda(x_1^2 - a^2)x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2) = 4\lambda(x_2^2 - a^2)x_2 - k(x_1 - x_2) = 0. \quad (2)$$

“(1) plus (2)”:

$$(x_1^2 - a^2)x_1 + (x_2^2 - a^2)x_2 = 0,$$

d.h. $x_1 = -x_2$ (Fall 1) oder $x_1 = x_2 = -a$ bzw. $x_1 = x_2 = \mp a$ (Fall 2).

“Fall 1, einsetzen in (1)”:

$$4\lambda(x_1^2 - a^2)x_1 + 2kx_1 = 2(2\lambda(x_1^2 - a^2) + k)x_1 = 0,$$

d.h. $x_1 = 0$ und damit $x_2 = 0$ (Gleichgewichtslage 1) oder $x_1 = \mp \sqrt{a^2 - k/2\lambda}$ und damit $x_2 = \pm \sqrt{a^2 - k/2\lambda}$ (Gleichgewichtslage 2 und 3, existiert nur für $a^2 > k/2\lambda$, d.h. schwache Feder).

“Fall 2, einsetzen in (1)”: Erfüllt (1) ohne weitere Bedingung, d.h. $x_1 = x_2 = \mp a$ (Gleichgewichtslage 4 und 5).

Lösung 5(a)

$$V(x_j) = \lambda(x_j^2 - a^2)^2 = \lambda((a + y_j)^2 - a^2)^2 = \lambda(2y_j a + y_j^2)^2 = \underbrace{4\lambda a^2}_{=\alpha/2} y_j^2 + \mathcal{O}(y_j^3)$$

$$\rightarrow L = \frac{m}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{y}_2^2 - \frac{\alpha}{2} y_1^2 - \frac{\alpha}{2} y_2^2 - \frac{k}{2} (y_1 - y_2)^2.$$

Lösung 5(b)

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \alpha + k & -k \\ -k & \alpha + k \end{pmatrix}$$

$$M\ddot{\mathbf{Y}} + K\mathbf{Y} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{Y} = (y_1, y_2).$$

Lösung 5(c)

$$\det(-M\omega_j^2 + K) = (m\omega_j^2)^2 - 2(\alpha + k)(m\omega_j^2) + \alpha^2 + 2\alpha k = 0$$

$$\rightarrow m\omega_1^2 = \alpha, \quad m\omega_2^2 = \alpha + k$$

$$(-M\omega_j^2 + K)\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} -m\omega_j^2 + \alpha + k & -k \\ -k & -m\omega_j^2 + \alpha + k \end{pmatrix} \mathbf{a}_j = 0$$

$$\rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}, \quad \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{\alpha + k}{m}}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^2 \mathbf{a}_j (A_j e^{+i\omega_j t} + B_j e^{-i\omega_j t}).$$