Prof. Marc Wagner
ITP, Universität Frankfurt - SS 2016

Organisation Übungen: **Arthur Dromard** **Raum 2.107** **dromard@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 11

vom 17.06.2016, Abgabe am 24.06.2016 in der Vorlesung

37) Hamilton-Formalismus (1) (mündlich) *(1+1=2 Punkte)*

Ein Teilchen bewegt sich in der x-z-Ebene auf einer vorgegebenen Kurve $z = f(x)$ unter dem Einfluss der in z-Richtung wirkenden konstanten Schwerkraft.

i. Berechne die Lagrange-Funktion und die Hamilton-Funktion.

ii. Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen?

38) Hamilton-Formalismus (2) (schriftlich) *(1+1+2+2=6 Punkte)*

i. Bestimme, ausgehend von der Lagrange-Funktion, die Hamilton-Funktion eines Massenpunktes (potentielle Energie V) in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ).

ii. Drücke das Drehimpulsquadrat durch die Koordinaten (r, ϑ, φ) und die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse aus.

iii. Zeige mit Hilfe der Poisson-Klammern, dass für sphärisch symmetrisches $V = V(r)$, der Drehimpuls erhalten ist.

iv. Führe für sphärisch symmetrisches $V = V(r)$ die Berechnung der Bahn des Massenpunkts auf Integrale zurück. Verwende dafür die Drehimpulserhaltung.

39) Poisson-Klammern (schriftlich) *(1+3=4 Punkte)*

Betrachte die folgende Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\gamma}{|\mathbf{r}|}.$$

i. Um welches bekannte physikalische Problem handelt es sich?

ii. Zeige mit Hilfe der Poisson-Klammern, dass der Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} + m\gamma \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

($\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ist der Drehimpuls) eine Erhaltungsgröße ist.

40) Betrachtungen im Phasenraum (mündlich) *(1+1+1+2+2+1=8 Punkte)*

Ein Teilchen (Masse m) bewegt sich in einer Dimension (Koordinate x) im Potential $V(x) = m\omega^2 x^2/2$.

i. Stelle die Lagrange-Funktion auf, berechne davon ausgehend die Hamilton-Funktion.

ii. Stelle die Hamiltonschen BGls auf und bestimme deren allgemeine Lösung.

iii. Skizziere die Phasenraumtrajektorien.

iv. Nachdem Du in ii. und iii. die zeitliche Entwicklung eines einzelnen Zustands, d.h. eines Punktes im Phasenraum bestimmt hast, wiederhole diese Aufgabe nun für eine Menge von Zuständen, d.h. ein endliches Volumen im Phasenraum, das zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die Phasenraumellipse

$$(p, x) \quad = \quad (\tilde{P}_0 + P_0 \cos(\lambda), Q_0 \sin(\lambda))$$

($\tilde{P}_0$, P_0, Q_0 sind Konstanten, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$) beschrieben wird. In anderen Worten, berechne, wie sich die durch λ parametrisierte Kontur der Ellipse mit der Zeit verändert. Beschreibe Dein Ergebnis in Worten. Ist das Phasenraumvolumen der Ellipse erhalten?

Zusätzlich zu der aus obigem Potential $V(x)$ folgenden Kraft wirkt auch noch die Reibungskraft $F_R = -m\alpha\dot{x}$.

v. Skizziere die Phasenraumtrajektorien.

vi. Ist das Phasenraumvolumen noch immer erhalten?