Organisation Übungen: **Arthur Dromard** **Raum 2.107** **dromard@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 12

vom 24.06.2016, Abgabe am 01.07.2016 in der Vorlesung

41) Lagrange-Funktion mit Faktor $e^{\gamma t}$ (mündlich) *(1+1+2=4 Punkte)*

Die Lagrange-Funktion eines sich in einer Dimension bewegenden Teilchens sei

$$L = e^{\gamma t}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right)$$

($\gamma > 0$).

i. Wie lautet die Euler-Lagrange-Gleichung?

ii. Berechne den kanonisch konjugierten Impuls? Gib die Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an.

iii. Betrachte die Bewegungsgleichungen für $V(x) = mgx$, d.h. $V(x)$ ist die potentielle Energie des Teilchens im homogenen Schwerefeld der Erde. Welche Kräfte beschreibt die Lagrange- bzw. Hamilton-Funktion? Löse die Bewegungsgleichungen. Skizziere die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.

42) Poisson-Klammern (schriftlich) *(2+1+1+1=5 Punkte)*

i. Beweise die sogenannte **Jacobi-Identität**

$$\{A\,,\,\{B\,,\,C\}\} + \{B\,,\,\{C\,,\,A\}\} + \{C\,,\,\{A\,,\,B\}\} = 0.$$

ii. Zeige, dass mit $I_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ und $I_2(\mathbf{p},\mathbf{q})$ auch $\{I_1(\mathbf{p},\mathbf{q})\,,\,I_2(\mathbf{p},\mathbf{q})\}$ eine Erhaltungsgröße ist.

iii. Zeige, dass ein System, das durch die Hamilton-Funktion

$$H = H_1(q_1,\ldots,q_j,p_1,\ldots,p_j) + H_2(q_{j+1},\ldots,q_f,p_{j+1},\ldots,p_f)$$

beschrieben wird, mindestens zwei Erhaltungsgrößen besitzt.

iv. Zeige, dass Invarianz bezüglich Rotationen um zwei orthogonale durch den Ursprung verlaufende Drehachsen, Erhaltung des Quadrats des Drehimpulses $\mathbf{l}^2$ impliziert.

43) Eigenwerte und Eigenvektoren (schriftlich) *(2+2+3=7 Punkte)*

i. Finde die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +3 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ +3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii. Ein Potential $V(x,y)$ habe die Form

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\Big(ax^2 + by^2 + 2cxy\Big).$$

(a) Wie lautet die zugehörige Kraftmatrix K?

(b) Unter welchen Bedingungen an a, b und c ist K

- positiv definit,
- negativ definit,
- indefinit?

Gib jeweils einen Beispielparametersatz (a, b, c) an und skizziere das Potential.

iii. Ein Potential $U(\mathbf{q})$, $\mathbf{q} = (x, y)$ habe die Form

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{q}\Big(\lambda_a\big(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\big) + \lambda_b\big(\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}\big)\Big)\mathbf{q} \tag{1}$$

mit $\mathbf{a} = (+\cos(\alpha), +\sin(\alpha))$ und $\mathbf{b} = (-\sin(\alpha), +\cos(\alpha))$ und wobei $\otimes$ das äußer Produkt oder tensorielle Produkt bezeichnet.

(a) Wie lautet die zugehörige Kraftmatrix K?

(b) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von K.

(c) Interpretiere Deine Ergebnisse anhand einer Skizze von $U(\mathbf{q})$.

(d) Wie kann Gleichung (1) von 2 Dimensionen $\mathbf{q} = (x, y)$ auf 3 Dimensionen $\mathbf{q} = (x, y, z)$ bzw. f Dimensionen übertragen werden?

44) Phasenraumtrajektorien des Pendels (mündlich) *(1+1+2=4 Punkte)*

Betrachte ein ebenes Pendel (Masse m, Länge l) im konstanten Gravitationsfeld, $V(\varphi) = -mgl\cos(\varphi)$ (die generalisierte Koordinate φ beschreibt die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage).

i. Stelle die Lagrange-Funktion auf, berechne davon ausgehend die Hamilton-Funktion.

ii. Stelle die Hamiltonschen BGls auf.

iii. Berechne die Form der Phasenraumtrajektorien $p_\varphi(\varphi)$ und skizziere diese Trajektorien sowohl für kleine als auch für große Energien. Welche spezielle Rolle spielen Trajektorien mit Energie $E = mgl$?