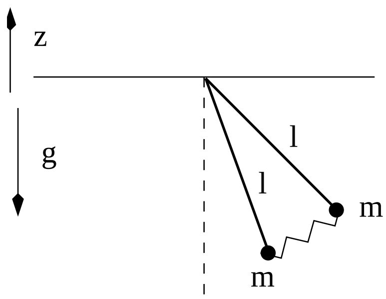
Blatt 13

vom 01.07.2016, Abgabe am 08.07.2016 in der Vorlesung

45) Kleine Schwingungen gekoppelter Pendel (mündlich) *(2+1+3+2+4=12 Punkte)*

Zwei identische ebene Pendel (Masse m und Länge l) mit gemeinsamem Aufhängepunkt führen Schwingungen unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes aus. Die Pendel sind mit einer Feder verbunden, die eine anziehende Kraft vom Betrag $F = m\omega^2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ ($\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ sind die Positionen der beiden Pendelmassen) entsprechend dem Hookschen Gesetz ausübt.



i. Stelle die Lagrange-Funktion auf und gib die Bewegungsgleichungen an.
Hinweis: Auch wenn die Winkelauslenkungen φ_1 und φ_2 der beiden Pendel aus einer jeweils senkrecht nach unten zeigenden Lage mögliche generalisierte Koordinaten sind, ist es zweckmäßiger die Koordinaten ψ und χ, definiert durch $\varphi_1 = (\psi + \chi)/2$ und $\varphi_1 = (\psi - \chi)/2$, zu verwenden.

ii. Bestimme sämtliche Gleichgewichtslagen (sowohl stabil als auch instabil).

Betrachte im Folgenden kleine Schwingungen.

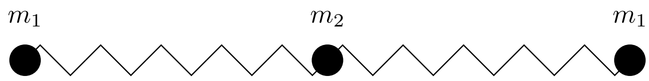
iii. (a) Berechne die Normalschwingungen um die Gleichgewichtslagen (sowohl um stabile als auch instabile Gleichgewichtslagen).
(b) Bestimme dazu die jeweilige Massen- und die Kraftmatrix und daraus die Frequenzen der Normalschwingungen.
(c) Diskutiere an Hand Deiner Ergebnisse, welche Gleichgewichtslagen stabil und welche instabil sind. Interpretiere Deine Ergebnisse, indem Du die Bewegungen der beiden Pendel für jede der Normalschwingungen in Worten beschreibst. Handelt es sich bei instabilen Gleichgewichtslagen um Schwingungen?

iv. Was ändert sich, wenn die attraktive Federkraft durch eine repulsive, ansonsten gleiche Kraft ersetzt wird?

v. Führe analoge Untersuchungen durch, wobei das homogene Schwerefeld durch ein ebenfalls in z-Richtung wirkendes elektrisches Feld $E\mathbf{e}_z$ (Potential $V = qEz$) ersetzt wird und die Pendel entgegengesetzte Ladungen $q = +Q$ und $q = -Q$ tragen (vernachlässige dabei die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Ladungen).

46) Kleine Schwingungen mit Federn verbundener Massenpunkte (schriftlich) *(3+1+1=5 Punkte)*

In einer Dimension sind drei Massenpunkte (Massen m_1 [$2\times$] und m_2) über zwei identische Federn (Ruhelängen 0, Federkonstanten k) miteinander verbunden (siehe Abbildung).



i. Bestimme Eigenfrequenzen und Eigenvektoren der Normalschwingungen sowie deren Energien.

ii. Interpretiere Deine Ergebnisse.

iii. Sind die Gleichgewichtslagen stabil?

47) Hilfreiche Formel zum Testen berechneter Eigenfrequenzen (schriftlich) *(2+1=3 Punkte)*

i. Leite eine einfache allgemeine Beziehung zwischen

$$\sum_j (\omega_j)^2$$

(ω_j sind die Eigenfrequenzen) und der zugehörigen Massen- und Kraftmatrix ab.

ii. Überprüfe Dein Ergebnis am Beispiel von Aufgabe 1.