Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2020 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 5

vom 15.05.20, Abgabe am 22.05.20, Besprechung in der Woche vom 25.05.20

Aufgabe 1 [*Lorentz-Invariantz von Gleichungen*] (2 Pkt.)

$x^\mu = (x^0, \vec{x})$, $K^\mu = (K^0, \vec{K})$ und j^μ sind Lorentz-Vektoren, $F^{\mu\nu}$ ist ein Lorentz-Tensor.
Zeige, dass die beiden Gleichungen

$$m\frac{d^2}{d\tau^2}x^\mu \quad = \quad K^\mu \quad , \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} \quad = \quad j^\nu$$

forminvariant unter Lorentz-Transformationen sind, also in Σ die gleiche Form haben wie in Σ' und damit sinnvolle Gleichungen im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie darstellen.

Hinweis: Ein Lorentz-Tensor transformiert sich gemäß $F'^{\sigma\rho} = \Lambda^\sigma{}_\mu \Lambda^\rho{}_\nu F^{\mu\nu}$.

Aufgabe 2 [*Bewegungsgleichungen*] (2+3+1=6 Pkt.)

Wir betrachten ein Raumschiff, das von einer Raumstation startet und geradlinig in x-Richtung beschleunigt wird, sodass ein Astronaut (Masse m) stets mit seinem gewohnten Erdgewicht mg gegen den Raumschiffboden gedrückt wird.

1. Stelle die Bewegungsgleichung für das Raumschiff im System der Raumstation auf.
2. Löse die Bewegungsgleichung d.h. berechne sowohl $v(t)$ als auch $x(t)$.
3. Diskutiere die Grenzfälle sehr kleiner und sehr großer Zeiten.

Hinweise: Beginne mit dem relativistischen Ausdruck des Dreierimpulses, um die Bewegungsgleichung aufzustellen.
Für die Lösung der Bewegungsgleichung ist das Integral $\int \frac{1}{\cos(x)^2} \mathrm{d}x = \tan(x) + C$ sowie die trigonometrische Relation $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ nützlich.

Aufgabe 3 [*Eigenzeit zweier Uhren*] (2+1+2=5 Pkt.)

Zwei Uhren bewegen sich von einem Startpunkt A zum Endpunkt B entlang zweier verschiedener Trajektorien mit relativistischen Geschwindigkeiten. Die erste Uhr bewegt sich entlang der Geraden

$$x_1(t) = v_0\, t,$$

die zweite Uhr entlang der Parabel

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\, a_0\, t^2.$$

1. Bestimme die Eigenzeit der Uhren bei Erreichen von B.
2. Welche Einschränkung besteht in der Wahl der Parameter v_0 beziehungsweise a_0?
3. Vergleiche die beiden Eigenzeiten für den maximal zulässigen Wert von v_0.

Aufgabe 4 [*Pion-Neutron-Streuung*] (3 Pkt.)

Betrachte die Kollision eines Pions mit einem ruhenden Neutron, bei der sich diese beiden Teilchen in ein K-Meson und ein Λ-Baryon umwandeln:

$$\pi^+ + n \to K^+ + \Lambda^0.$$

Die Massen des Pions, des Neutrons, des K-Mesons und des Λ-Baryons sind $m_{\pi^+} = 140\,\mathrm{MeV}/c^2$, $m_n = 940\,\mathrm{MeV}/c^2$, $m_{K^+} = 494\,\mathrm{MeV}/c^2$ und $m_{\Lambda^0} = 1115\,\mathrm{MeV}/c^2$. Berechne die Schwellenenergie (Minimalenergie) zur Erzeugung des K-Mesons im Winkel $90°$ zur Einfallsrichtung des Pions im Laborsystem, in dem das Neutron ruht.

Aufgabe 5 [*Diskrete Mechanik*] (2+2=4 Pkt.)

Häufig ist es notwendig, die Gleichungen der Mechanik zu diskretisieren, z.B. wenn numerische Rechnungen ausgeführt werden müssen. Die Trajektorie $\mathbf{r}(t)$, $t \in [t_i, t_f]$ wird dann durch $3(N+1)$ Variablen $\mathbf{r}_j$, $j = 0, \ldots, N$ ersetzt mit den Entsprechungen

$j \equiv t_i + j\Delta t$, wobei $\Delta t = (t_f - t_i)/N$,

$\mathbf{r}_j \equiv \mathbf{r}(t_i + j\Delta t)$.

Die Wirkung dieser "diskreten Mechanik" ist kein Funktional, sondern eine Funktion in den $3(N+1)$ Variablen $\mathbf{r}_j$,

$$S(\mathbf{r}_j) = \sum_{j=1}^{N} \Delta t \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}_j^2 - \frac{1}{2} \Big(U(\mathbf{r}_j) + U(\mathbf{r}_{j-1}) \Big) \right)$$

mit

$$\mathbf{v}_j = \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}}{\Delta t}.$$

Dabei ist $U(\mathbf{r})$ die potentielle Energie.

Analog zur in der Vorlesung diskutierten "kontinuierlichen Mechanik" ergeben sich die Bewegungsgleichungen aus der Forderung $dS = 0$ bei beliebiger Variation $d\mathbf{r}_j$, $j = 1, \ldots, N-1$, d.h. die Randwerte $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_f$ werden festgehalten.

1. Leite die Bewegungsgleichungen der diskreten Mechanik her, indem Du S minimierst, und interpretiere Dein Ergebnis, durch Vergleich mit den bekannten Bewegungsgleichungen der kontinuierlichen Mechanik.
2. Berechne die diskreten Trajektorien $\mathbf{r}_j$ für $U(\mathbf{r}) = 0$ sowie für $U(\mathbf{r}) = mgz$. Vergleiche mit den entsprechenden kontinuierlichen Trajektorien.