Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

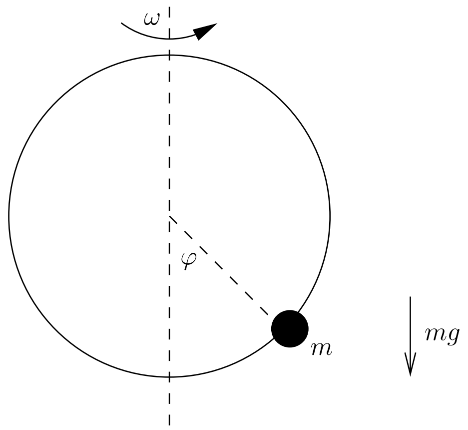
Aufgabenblatt 8

vom 05.06.20, Abgabe am 12.06.20, Besprechung in der Woche vom 15.06.20

Aufgabe 1 [*Perle auf rotierendem kreisförmigem Draht*] (2+2+4=8 Pkt.)

Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich reibungsfrei auf einem Kreis mit Radius l. Der Kreis dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch den Mittelpunkt des Kreises verlaufende vertikale Achse. In Richtung dieser Achse wirkt die Schwerkraft.

1. Verwende die generalisierte Koordinate φ und gib die Lagrange-Funktion an.
2. Bestimme mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung.
3. Bestimme die Gleichgewichtslagen des Systems und berechne Schwingungen mit kleiner Amplitude um die stabilen Gleichgewichtslagen.



Aufgabe 2 [*Perle auf Schraubenbahn*] (1+1+1+1+1+1=6 Pkt.)

Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich auf einer entlang der z-Achse ausgerichteten Schraubenlinie mit Radius ρ und Ganghöhe l,

$$z(\varphi + 2\pi) \quad = \quad l + z(\varphi).$$

In negative z-Richtung wirkt die Schwerkraft.

1. Berechne ausgehend von Zylinderkoordinaten die Metrik der Schraubenlinie mit φ als generalisierter Koordinate.
2. Benutze dieses Ergebnis zur Berechnung der kinetischen Energie.

3. Berechne mit Hilfe des Energiesatzes die Trajektorie für den Fall, dass zur Zeit $t = 0$ der Massenpunkt ruht.

4. Berechne den zurückgelegten Weg, das heißt die Bogenlänge der Bahn des Massenpunkts als Funktion von t, und vergleiche mit dem zurückgelegtem Weg bei einem freien Fall.

5. l und ρ seien unbeobachtbar klein. Wie macht sich die Anwesenheit der Schraubenlinie im Vergleich zum "freien Fall" bemerkbar?

6. Berechne die z-Komponente des Drehimpulses l_z. Begründe, warum l_z nicht erhalten ist. Was geschieht, wenn die Schraubenlinie frei drehbar aufgehängt ist?

Aufgabe 3 [*Freier relativistischer Massenpunkt*] `(3 Pkt.)`

Die Wirkung eines sich kräftefrei bewegenden Massenpunkts (Masse m) in der speziellen Relativitätstheorie ist

$$S[x^0, \ldots, x^3] \;=\; -mc \int d\lambda \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \quad , \quad \eta_{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Dabei ist λ ein willkürlicher Parameter.

Leite mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen her und löse diese Bewegungsgleichungen für die Wahl

$$\lambda \;=\; \tau \;=\; \text{Eigenzeit.}$$

Aufgabe 4 [*Potential durch Metrik*] `(3 Pkt.)`

Berechne die Geodätengleichungen einer 2-dimensionalen Fläche (generalisierte Koordinaten (u, x)), deren Metrik durch

$$ds^2 \;=\; f(x)\, du^2 + dx^2 \tag{1}$$

gegeben ist. Bestimme $f(x)$ so, dass die Trajektorien der 1-dimensionalen Bewegung eines Massenpunktes im Potential $U(x)$ den x-Komponenten von Geodäten auf der oben definierten 2-dimensionalen Fläche entsprechen.