Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2020 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 9

vom 12.06.20, Abgabe am 19.06.20, Besprechung in der Woche vom 22.06.20

Aufgabe 1 [*Geladenes Teilchen im konstanten magnetischen Feld*] (1+2+1+2+2=8 Pkt.)

Die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens in einem konstanten magnetischen Feld ist

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \tag{1}$$

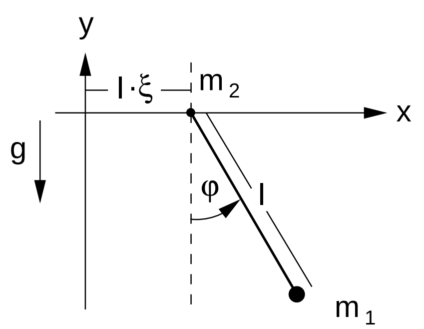
mit

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\Big(x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x\Big)B_0 \quad , \quad B_0 = \text{const.} \tag{2}$$

1. Berechne $\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A}$.
2. Zeige, dass die Lagrange-Funktion invariant unter Translation in z-Richtung sowie Rotation um die z-Achse ist, und bestimme die zugehörigen Erhaltungsgrößen.
3. Betrachte die Transformationseigenschaften von L unter Translation in x-Richtung und in y-Richtung und bestimme die zugehörigen Erhaltungsgrößen.
4. Leite mit Hilfe des Noether-Theorems die Energieerhaltung her.
5. Berechne mit Hilfe der gewonnenen Erhaltungsgrößen (d.h. ohne auf die Euler-Lagrange Gleichungen zurückzugreifen) die möglichen Bahnen $\mathbf{r}(t)$ des Teilchens und verifiziere durch Einsetzen dieser Bahnen, dass sich keine der gewonnenen Erhaltungsgrößen mit der Zeit verändert.

Aufgabe 2 [*Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt*] (2+2+2+2=8 Pkt.)

Ein ebenes Pendel ist im konstanten Schwerefeld so aufgehängt, dass sich der massive Aufhängepunkt reibungsfrei auf einer horizontalen Achse bewegen kann.



1. Verwende die in der Zeichnung spezifizierten generalisierten Koordinaten (φ, ξ) und stelle die Lagrange-Funktion auf.

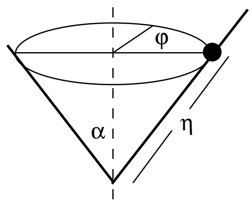
2. Warum tritt eine zyklische Koordinate auf? Berechne die zugehörige Erhaltungsgröße und interpretiere das Ergebnis.

3. Bestimme die Bahnkurve $(x_1(\varphi), y_1(\varphi))$ des Massenpunkts 1, für den Fall, dass der Schwerpunkt des Systems keine Bewegung in x-Richtung ausführt. Welche geometrische Form beschreibt die Bahnkurve?

4. Vernachlässige nun die Masse des Aufhängepunkts, d.h. $m_2 = 0$. Berechne $\varphi(t)$ und $\xi(t)$ für beliebige Anfangsbedingungen (z.B. mit Hilfe der Energieerhaltung und der in 2. gewonnenen Erhaltungsgröße). Unter welcher Bedingung schlägt das Pendel über?

Aufgabe 3 [*Bewegung auf Kegelfläche*] `(1+1+2=4 Pkt.)`

1. Bestimme die Lagrange-Funktion für die Bewegung eines freien Massenpunktes auf einer Kegelfläche (Öffnungswinkel α). Verwende dabei die generalisierten Koordinaten η und φ. Wie lauten die entsprechenden Bewegungsgleichungen?



2. Bestimme die Christoffel-Symbole mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Beziehung

$$\Gamma^j_{km} = \frac{g^{jl}}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial q^l}\right). \quad (3)$$

   Verifiziere Deine Ergebnisse durch Vergleich mit den in 1. gewonnenen Bewegungsgleichungen.

3. Berechne und skizziere $\eta(t)$ und $\varphi(t)$ unter Verwendung der Energieerhaltung.
   Hinweis: Zur Berechnung von $\varphi(t)$ ist es zielführend, das Integral auf die Form $\int dt \frac{1}{(at+b)^2+c^2}$ zu bringen und anschließend den Zusammenhang $\int dx \frac{1}{x^2+1} = \arctan(x) + C$ zu nutzen.