Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2020 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 12

vom 03.07.20, Abgabe am 10.07.20, Besprechung in der Woche vom 13.07.20

Aufgabe 1 [***Bonusaufgabe:*** *Eigenwerte und Eigenvektoren*] (3+3+4=10 Pkt.)

1. Finde die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \\ M_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & +3 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ +3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \\ M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Ein Potential $V(x,y)$ habe die Form

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\Big(ax^2 + by^2 + 2cxy\Big).$$

   (a) Wie lautet die zugehörige Kraftmatrix K?

   (b) Unter welchen Bedingungen an a, b und c ist K
   - positiv definit,
   - negativ definit,
   - indefinit?

   Gib jeweils einen Beispielparametersatz (a,b,c) an und skizziere das Potential.
   Hinweis: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist positiv definit, wenn $\det(A) > 0$ und $\mathrm{spur}(A) > 0$ (siehe Mathe II).

3. Ein Potential $U(\mathbf{q})$, $\mathbf{q} = (x,y)$ habe die Form

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{q}\Big(\lambda_a\big(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\big) + \lambda_b\big(\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}\big)\Big)\mathbf{q} \qquad (1)$$

   mit $\mathbf{a} = (+\cos(\alpha), +\sin(\alpha))$ und $\mathbf{b} = (-\sin(\alpha), +\cos(\alpha))$ und wobei $\otimes$ das äußer Produkt oder tensorielle Produkt bezeichnet.

   (a) Wie lautet die zugehörige Kraftmatrix K?

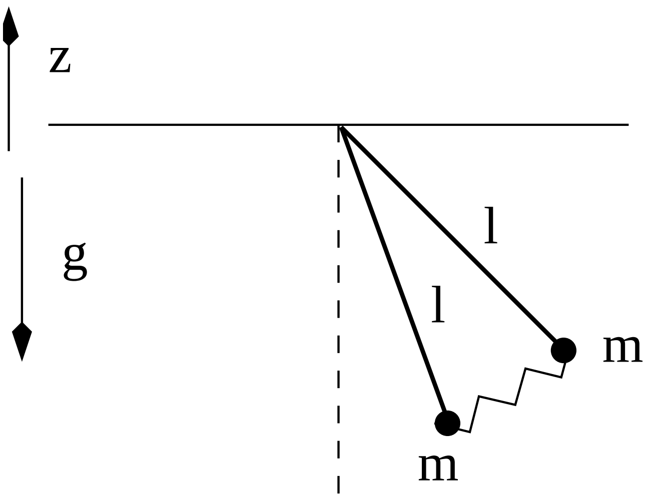
(b) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von K.

(c) Interpretiere Deine Ergebnisse anhand einer Skizze von $U(\mathbf{q})$.

(d) Wie kann Gleichung (1) von 2 Dimensionen $\mathbf{q} = (x, y)$ auf 3 Dimensionen $\mathbf{q} = (x, y, z)$ bzw. f Dimensionen übertragen werden?

Aufgabe 2 [*Kleine Schwingungen gekoppelter Pendel*] (3+2+3+2+4=14 Pkt.)

Zwei identische ebene Pendel (Masse m und Länge l) mit gemeinsamem Aufhängepunkt führen Schwingungen unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes aus. Die Pendel sind mit einer Feder verbunden, die eine anziehende Kraft vom Betrag $F = m\omega^2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ ($\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ sind die Positionen der beiden Pendelmassen) entsprechend dem Hookschen Gesetz ausübt.



1. Stelle die Lagrange-Funktion auf und gib die Bewegungsgleichungen an. *Hinweis: Auch wenn die Winkelauslenkungen φ_1 und φ_2 der beiden Pendel aus einer jeweils senkrecht nach unten zeigenden Lage mögliche generalisierte Koordinaten sind, ist es zweckmäßiger die Koordinaten ψ und χ, definiert durch $\psi = (\varphi_1 + \varphi_2)$ und $\chi = (\varphi_1 - \varphi_2)$, zu verwenden. Zum Umformen sind die trigonometrische Relationen* $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$ *sowie* $\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(x-y)$ *nützlich.*

2. Bestimme sämtliche Gleichgewichtslagen (sowohl stabil als auch instabil).

Betrachte im Folgenden kleine Schwingungen.

3. (a) Berechne die Normalschwingungen um die Gleichgewichtslagen (sowohl um stabile als auch instabile Gleichgewichtslagen) indem Du die jeweilige Massen- und die Kraftmatrix aufstellst und daraus die Frequenzen der Normalschwingungen berechnest.

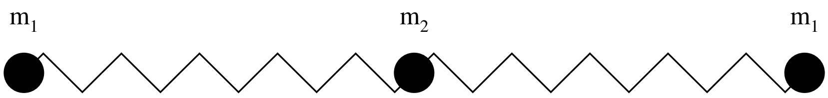
   (b) Diskutiere anhand Deiner Ergebnisse, welche Gleichgewichtslagen stabil und welche instabil sind.

4. Was ändert sich, wenn die attraktive Federkraft durch eine repulsive, ansonsten gleiche Kraft ersetzt wird?

5. Führe analoge Untersuchungen durch, wobei das homogene Schwerefeld durch ein ebenfalls in z-Richtung wirkendes elektrisches Feld $E\mathbf{e}_z$ (Potential $V = qEz$) ersetzt wird und die Pendel entgegengesetzte Ladungen $q = +Q$ und $q = -Q$ tragen (vernachlässige dabei die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Ladungen).

Aufgabe 3 [*Kleine Schwingungen mit Federn verbundener Massenpunkte*] `(4+1+1=6 Pkt.)`

In einer Dimension sind drei Massenpunkte (Massen m_1 [2×] und m_2) über zwei identische Federn (Ruhelängen 0, Federkonstanten k) miteinander verbunden (siehe Abbildung).



1. Bestimme Eigenfrequenzen und Eigenvektoren der Normalschwingungen um die Gleichgewichtslage sowie deren Energien. Normiere dazu die Eigenvektoren so, dass $\vec{a}_i^T M \vec{a}_j = \delta_{ij}$.

2. Interpretiere Deine Ergebnisse, insbesondere die auftretende Eigenfrequenz $\omega = 0$. Sind die Gleichgewichtslagen stabil?

Aufgabe 4 [*Hilfreiche Formel zum Testen berechneter Eigenfrequenzen*] `(Präsenzaufgabe 0 Pkt.)`

Diese Aufgabe wird als Präsenzaufgabe im Tutorium durchgenommen und muss nicht abgegeben werden. Wir empfehlen Euch, diese Aufgabe dennoch vorzubereiten, der vermittelte Stoff ist wie sonst auch klausurrelevant. Zu dieser Aufgabe wird kein Lösungsvideo bereitgestellt.

1. Leite eine einfache allgemeine Beziehung zwischen

$$\sum_j (\omega_j)^2$$

(ω_j sind die Eigenfrequenzen) und der zugehörigen Massen- und Kraftmatrix ausgehend von der Eigenwertgleichung ab.

2. Überprüfe Dein Ergebnis am in der Vorlesung diskutierten Beispiel der vertikalen Bewegung von 2 Massenpunkten, die mit Federn verbunden sind (siehe S. 58 ff. Skript Theo 2 Sommersemester 2020). Verwende dazu die in (218) und (219) definierte Massen- und Kraftmatrix für den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$, $\kappa_1/3 = \kappa_2/2 = \kappa$. Nutze außerdem die in (233) hergeleiteten Eigenfrequenzen.