Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2020 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: `pflaumer@itp.uni-frankfurt.de`

Aufgabenblatt 13

vom 10.07.20, keine Abgabe, Besprechung in der Woche vom 13.07.20

Aufgabe 1 [*Rechnen mit dem starren Körper*] (Präsenzaufgabe 0 Pkt.)

1. Der Schwerpunkt eines starren Körpers in 2 Raumdimensionen ist gegeben durch

$$\vec{x}_s = \frac{1}{M}\int_A \mathrm{d}A\ \rho(\vec{x})\vec{x}.$$

Berechne den Schwerpunkt eines Halbkreises mit Radius a, Masse M und homogener Massenverteilung $\rho(\vec{x}) = \frac{M}{A} = \text{const.}$ mit

$$\vec{x}(r,\varphi) = r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}, \quad r \in [0,a], \quad \varphi \in [0,\pi].$$

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf 3 Raumdimensionen.

2. Das Trägheitsmoment eines starren Körpers bezogen auf eine durch den Ursprung verlaufende Rotationsachse $\vec{n}$ ist gegeben durch

$$J = \int_V \mathrm{d}V\ \rho(\vec{x})\vec{x}_\perp^2 \tag{1}$$

wobei $\vec{x}_\perp$ der zur Rotationsachse $\vec{n}$ senkrechte Anteil von $\vec{x}$ ist.

Berechne das Trägheitsmoment einer Vollkugel mit Radius a, Masse M und homogener Massenverteilung $\rho(\vec{x}) = \text{const.}$ bezogen auf eine durch das Zentrum der Kugel verlaufende Rotationsachse.

3. Der Trägheitstensor Θ ist eine Verallgemeinerung des Trägheitsmoments und definiert als

$$\Theta_{ij} = \int_V \mathrm{d}V\ \rho(\vec{x})\left(\vec{x}^2\delta_{ij} - x_i x_j\right) \tag{2}$$

Berechne für einen im Ursprung zentrierten Vollzylinder mit Höhe h, Radius a, Masse M und homogener Massenverteilung $\rho(\vec{x}) = \text{const.}$ den Trägheitstensor.

4. Das Trägheitsmoment bezüglich einer durch den Ursprung verlaufenden Rotationsachse $\vec{n}$ ergibt sich aus dem Trägheitstensor gemäß

$$J = \vec{n}^T\Theta\,\vec{n}.$$

Beweise diese Aussage ausgehend von (1) und (2).