Klausur zu “Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik”

29. Juli 2020

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Theoretische Physik

---

5 Aufgaben mit insgesamt **50** Punkten. Die Klausur ist mit **25** oder mehr Punkten bestanden.

Name: ______________________________

Martrikelnummer: ______________________________

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
Gesamt	
Note	

Aufgabe 1 (1.5+2+2.5+4+2=12 Punkte)

Ein Teilchen (Masse m) bewegt sich auf einer Zylinderfläche (Radius R, die Symmetrieachse des Zylinders entspricht der z-Achse) im Potential $V = m\omega^2 z^2/2$. Verwende als generalisierte Koordinaten (φ, z) entsprechend der Abbildung.

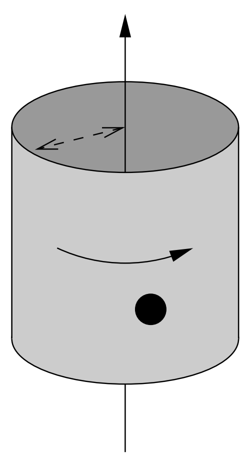
(a) Drücke die kartesischen Koordinaten durch die generalisierten Koordinaten aus, d.h. gib $x(\varphi, z)$, $y(\varphi, z)$ und $z(\varphi, z)$ an.

(b) Berechne die kinetische Energie T und die Lagrange-Funktion L in den generalisierte Koordinaten.

(c) Bestimme die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse p_φ und p_z und berechne mit Hilfe einer Legendre-Transformation die Hamilton-Funktion H des Systems.

(d) Bestimme die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Löse diese Gleichungen, d.h. bestimme die allgemeine Lösung $\varphi(t)$ und $z(t)$.

(e) Berechne die Poisson-Klammern $\{p_\varphi, H\}$ und $\{p_z, H\}$. Handelt es sich bei p_φ beziehungsweise bei p_z um Erhaltungsgrößen? (Begründe Deine Antwort.)



Aufgabe 2 (3+2.5+4+2.5=12 Punkte)

Ein Teilchen (Masse m) bewegt sich auf einer durch die Funktion $z(x, y)$ beschriebenen Fläche (x, y und z bezeichnen gewöhnliche kartesische Koordinaten). In negative z-Richtung wirkt die konstante Schwerkraft mg.

(a) Verwende x und y als generalisierte Koordinaten und berechne den metrischen Tensor.

(b) Verwende den metrischen Tensor, um die kinetische Energie und die Lagrange-Funktion anzugeben.

Betrachte für die folgenden Teilaufgaben den Spezialfall einer geneigten Ebene, beschrieben durch $z(x, y) = \alpha x$.

(c) Bestimme mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen. Löse diese Bewegungsgleichungen, d.h. bestimme die allgemeine Lösung $x(t)$ und $y(t)$.

(d) Eine in der geneigten Ebene verlaufende Kurve ist durch $(x(\lambda), y(\lambda)) = R(\cos(\lambda), \sin(\lambda))$, $0 \leq \lambda < 2\pi$ definiert. Gib mit Hilfe des metrischen Tensors zunächst einen Integralausdruck für die Länge dieser Kurve an und vereinfache diesen Ausdruck so weit wie möglich. Berechne schließlich das Integral für den Spezialfall $\alpha = 0$.

Aufgabe 3 (3+3+6=12 Punkte)

Ein physikalisches System ist durch die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T K \mathbf{q}$$

gegeben mit der Massen- und Kraftmatrix

$$M = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad K = k \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Weise nach, dass $\mathbf{q} = 0$ eine stabile Gleichgewichtslage darstellt.

(b) Wie lauten die Bewegungsgleichungen? (Angeben genügt, Herleiten ist nicht erforderlich.) Reduziere die Bewegungsgleichungen durch Verwendung des Exponentialansatzes $\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}_j e^{i\omega_j t}$ und entsprechende Rechnung auf ein generalisiertes Eigenwertproblem.

(c) Löse das generalisierte Eigenwertproblem. Normiere dabei die Eigenvektoren gemäß der in der Vorlesung diskutierten Konvention $\mathbf{a}_j^T M \mathbf{a}_k = \delta_{jk}$. Gib damit die allgemeine reelle Lösung der Bewegungsgleichungen an.

Aufgabe 4 (1.5+2.5+4=8 Punkte)

(a) Ein kontravarianter Vektor A^μ transformiert sich in der Speziellen Relativitätstheorie unter Lorentz-Transformation gemäß $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$. Wie lautet das entsprechende Transformationsverhalten des kovarianten Vektors B_μ? (Angeben genügt, Herleiten ist nicht erforderlich.)

(b) Zeige unter Verwendung der definierenden Eigenschaft für Lorentz-Transformationen, $\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu$, dass $A^\mu B_\mu$ Lorentz-invariant ist.

(c) Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

- $A^\mu B_\mu + A^\mu \eta_{\mu\nu} B^\nu$.
- $4\partial_\mu \partial_\nu A_\rho - (\partial_\alpha x^\alpha)\partial_\nu \partial_\mu A_\rho$.
- $\eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\mu} \eta_\nu{}^\alpha$.
- $p^\mu p_\mu$ (wobei p^μ den Viererimpuls eines masselosen Teilchens bezeichnet).

Aufgabe 5 (1+3+2=6 Punkte)

Beantworte diese Aufgabe im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie.

Ein Raumfahrer umkreist die Erde im Radius R mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag, wobei er für eine Umrundung die Zeit T benötigt (sowohl R als auch T beziehen sich auf das Intertialsystems der Erde).

(a) Sind im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie beliebige Werte für R und T erlaubt? Falls nein, formuliere die entsprechende Einschränkung als mathematische Beziehung, in der R und T auftreten.

(b) Was versteht man unter der Eigenzeit des Raumfahrers? Gib eine Formel zur Berechnung der Eigenzeit des Raumfahrers in den Koordinaten des Intertialsystems der Erde an (erkläre dabei die Bedeutung der von Dir verwendeten Größen).

(c) Wieviel Zeit vergeht auf der Uhr des Raumfahrers bei einer Umrundung?

Punkteverteilung und Kommentare zur Punkteverteilung in rot.

Lösung 1(a) Gesamt: 1.5

$$x = R\cos(\varphi) \ \ 0.5 \quad , \quad y = R\sin(\varphi) \ \ 0.5 \quad , \quad z = z. \ \ 0.5$$

Lösung 1(b) Gesamt: 2

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= (R\cos(\varphi), R\sin(\varphi), z) \\
\dot{\mathbf{r}} &= (-R\sin(\varphi)\dot{\varphi}, +R\cos(\varphi)\dot{\varphi}, \dot{z}) \\
T &= \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \ \ 1 \\
L &= T - V = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{m\omega^2 z^2}{2}. \ \ 1
\end{aligned}$$

Lösung 1(c) Gesamt: 2.5

$$\begin{aligned}
p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2} \ \ 0.5 \\
p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad \rightarrow \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m} \ \ 0.5 \\
H &= \underset{0.5}{p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L} = \underset{0.5}{\frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{m\omega^2 z^2}{2}} = \underset{0.5}{\frac{p_\varphi^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2 z^2}{2}}
\end{aligned}$$

(im Ergebnis darf kein $\dot{\varphi}$ oder $\dot{z}$ vorkommen).

Lösung 1(d) Gesamt: 4

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= +\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2} \ \ 0.5 \\
\dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \ \ 0.5 \\
\dot{z} &= +\frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \ \ 0.5 \\
\dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -m\omega^2 z. \ \ 0.5
\end{aligned}$$

Gleichungen für φ und z entkoppeln. Lösung durch Ableiten und Einsetzen.

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= \frac{\dot{p}_\varphi}{mR^2} = 0 \quad \to \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \Omega t \;\; \text{1 (fehlt eine Konstante, nur 0.5)} \\
\ddot{z} &= \frac{\dot{p}_z}{m} = -\omega^2 z \quad \to \quad z(t) = A\cos(\omega t + \alpha), \;\; \text{1 (fehlt eine Konstante, nur 0.5)}
\end{aligned}$$

wobei φ_0, Ω, A und α unbestimmte Konstanten sind.

Lösung 1(e) Gesamt: 2

$$\begin{aligned}
\{p_\varphi, H\} &= 0 \quad (\text{weil } \varphi \text{ in } H \text{ nicht vorkommt}) \;\; 0.5 \\
\{p_z, H\} &= \{p_z, \frac{m\omega^2 z^2}{2}\} = m\omega^2 z\{p_z, z\} = -m\omega^2 z. \;\; 0.5
\end{aligned}$$

p_φ ist eine Erhaltungsgröße, weil die Poisson-Klammer mit H verschwindet (0.5). p_z ist keine Erhaltungsgröße, weil die Poisson-Klammer mit H nicht verschwindet (0.5).

Lösung 2(a) Gesamt: 3

$$\begin{aligned}
\partial\mathbf{r}/\partial x &= (1, 0, \partial z/\partial x) \quad , \quad \partial\mathbf{r}/\partial y = (0, 1, \partial z/\partial y) \\
g_{xx} &= \underset{0.5}{(\partial\mathbf{r}/\partial x)^2} = 1 + (\partial z/\partial x)^2 \;\; 0.5 \\
g_{yy} &= \underset{0.5}{(\partial\mathbf{r}/\partial y)^2} = 1 + (\partial z/\partial y)^2 \;\; 0.5 \\
g_{xy} &= g_{yx} = \underset{0.5}{(\partial\mathbf{r}/\partial x)(\partial\mathbf{r}/\partial y)} = (\partial z/\partial x)(\partial z/\partial y). \;\; 0.5
\end{aligned}$$

Lösung 2(b) Gesamt: 2.5

$$\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}\dot{q}^j g_{jk}\dot{q}^k = \frac{m}{2}\Big(\overset{0.5}{\Big(1 + (\partial z/\partial x)^2\Big)\dot{x}^2} + \overset{0.5}{\Big(1 + (\partial z/\partial y)^2\Big)\dot{y}^2} + \overset{0.5}{2(\partial z/\partial x)(\partial z/\partial y)\dot{x}\dot{y}}\Big) \\
L &= T - V = T - mgz. \;\; 1
\end{aligned}$$

Lösung 2(c) Gesamt: 4

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}\Big((1+\alpha^2)\dot{x}^2 + \dot{y}^2\Big) - mgx \;\; 1 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \underset{0.5}{\to} \ddot{x} = -\frac{g}{(1+\alpha^2)} \;\; 0.5 \quad \to \quad x(t) = -\frac{g}{2(1+\alpha^2)}t^2 + v_{0,x}t + x_0 \;\; 0.5 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \underset{0.5}{\to} \ddot{y} = 0 \;\; 0.5 \quad \to \quad y(t) = v_{0,y}t + y_0 \;\; 0.5,
\end{aligned}$$

wobei $v_{0,x}$, x_0, $v_{0,y}$ und y_0 unbestimmte Konstanten sind.

Die ersten 0.5 sind jeweils für den korrekten Rechenweg zur Berechnung von Euler-Lagrange.

Lösung 2(d) Gesamt: 2.5

$$s = \int_0^{2\pi} d\lambda \left(\frac{dq^j}{d\lambda} g_{jk} \frac{dq^k}{d\lambda} \right)^{1/2} \quad 0.5,$$

wobei $(q^1, q^2) = (x, y)$, $\partial q^1/\partial\lambda = -R\sin(\lambda)$ und $\partial q^2/\partial\lambda = +R\cos(\lambda)$. Damit

$$s = R\int_0^{2\pi} d\lambda \Big(\underbrace{(1+\alpha^2)\sin^2(\lambda) + \cos^2(\lambda)}_{0.5} \Big)^{1/2} = R\int_0^{2\pi} d\lambda \Big(1 + \alpha^2 \sin^2(\lambda) \Big)^{1/2} \quad 0.5.$$

Für $\alpha = 0$

$$s = R\int_0^{2\pi} d\lambda = 2\pi R \quad 1.$$

Lösung 3(a) Gesamt: 3

Die Kraftmatrix ist bei einer stabilen Gleichgewichtslage positiv definit 1 (Erkennen, dass Kraftmatrix positiv definit sein muss).

$$\mathbf{q}^T K \mathbf{q} = 2(q^1)^2 + 2(q^2)^2 + 2(q^3)^2 + 2q^2q^3 = 2(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 + (q^2+q^3)^2 \quad 1. \tag{1}$$

Da es sich um eine Summe von Quadraten handelt, ist für alle $|\mathbf{q}| \neq 0$

$$\mathbf{q}^T K \mathbf{q} > 0 \quad 1.$$

Also ist K positiv definit.

Alternativ: Gl. (1), linke Seite, ist bis auf Faktor 1/2 das Potential. Auf der rechten Seite kann man ablesen, dass das Minimum des Potentials bei $\mathbf{q} = 0$ liegt.

Lösung 3(b) Gesamt: 3

$$M\ddot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = 0 \quad 1.$$

Einsetzen des Exponentialansatzes:

$$\Big(-M\omega_j^2 + K \Big) \mathbf{a}_j e^{i\omega_j t} = 0 \quad 1.$$

Da $e^{i\omega_j t} \neq 0$,

$$\Big(- M\omega_j^2 + K \Big)\mathbf{a}_j \;=\; 0. \; {\color{red}1}$$

Lösung 3(c) Gesamt: 6

$$\Big(- M\omega_j^2 + K \Big)\mathbf{a}_j \;=\; \begin{pmatrix} -m\omega_j^2 + 2k & 0 & 0 \\ 0 & -m\omega_j^2 + 2k & k \\ 0 & k & -m\omega_j^2 + 2k \end{pmatrix} \mathbf{a}_j \;=\; 0. \; {\color{red}1}$$

Charakteristisches Polynom:

$$0 \;=\; \underbrace{\det\Big(- M\omega_j^2 + K \Big)}_{\color{red}0.5} \;=\; \Big(- m\omega_j^2 + 2k \Big)\Big(\Big(- m\omega_j^2 + 2k \Big)^2 - k^2 \Big). \; {\color{red}1}$$

Damit

$$\omega_1^2 \;=\; 2k/m \quad (\text{1. Faktor } = 0) \; {\color{red}0.5}$$
$$\omega_2^2 \;=\; k/m \quad , \quad \omega_3^2 \;=\; 3k/m \quad (\text{2. Faktor } = 0) \; {\color{red}0.5}.$$

Zugeordnete normierte Eigenvektoren sind:
$\mathbf{a}_1 = (+1, 0, 0)/\sqrt{m}$ 0.5, $\mathbf{a}_2 = (0, +1, -1)/\sqrt{2m}$ 0.5, $\mathbf{a}_3 = (0, +1, +1)/\sqrt{2m}$ 0.5.

Allgemeine reelle Lösung der Bewegungsgleichungen:

$$\mathbf{q}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{3} \mathbf{a}_j \Big(A_j e^{+i\omega_j t} + A_j^* e^{-i\omega_j t} \Big) \; {\color{red}1}$$

mit unbestimmten komplexen Konstanten A_j.

Lösung 4(a) Gesamt: 1.5

$$B'_\mu \;=\; \Lambda_\mu{}^\nu B_\nu. \; {\color{red}1.5}$$

Lösung 4(b) Gesamt: 2.5

$$\underbrace{A'^\mu B'_\mu}_{\color{red}0.5} \;=\; \underbrace{A'^\mu \eta_{\mu\nu} B'^\nu}_{\color{red}0.5} \;=\; \underbrace{\Lambda^\mu{}_\rho A^\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma B^\sigma}_{\color{red}0.5} \;=\; \underbrace{A^\rho \eta_{\rho\sigma} A^\sigma}_{\color{red}0.5} \;=\; \underbrace{A^\mu B_\mu}_{\color{red}0.5}.$$

Lösung 4(c) Gesamt: 4

- $A^\mu B_\mu + A^\mu \eta_{\mu\nu} B^\nu = 2A^\mu B_\mu$ 1.
- $4\partial_\mu \partial_\nu A_\rho - (\partial_\alpha x^\alpha)\partial_\nu \partial_\mu A_\rho = 0$ 1.
- $\eta^{\mu\nu}\eta_{\alpha\mu}\eta_\nu{}^\alpha = 4$ 1.
- $p^\mu p_\mu = 0$ 1.

Lösung 5(a) Gesamt: 1

$$v = \frac{2\pi R}{T} < c$$ 1.

Lösung 5(b) Gesamt: 3

Die Eigenzeit des Raumfahrers ist die Zeit, die seine mitgeführte Uhr anzeigt 1.

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - (v(t)/c)^2}$$ 1

(v: Geschwindigkeit des Raumfahrers im Erdsystem; t: Zeit im Erdsystem; t_1 und t_2: Anfangs- und Endzeitpunkt im Erdsystem; τ: Eigenzeit, d.h. für den Raumfahrer vergangene Zeitspanne) 1 (für Erklärung der Größen).

Lösung 5(c) Gesamt: 2

$$\tau = \int_0^T dt \left(1 - \underbrace{\left(\frac{2\pi R}{cT}\right)^2}_{1}\right)^{1/2} = T\left(1 - \left(\frac{2\pi R}{cT}\right)^2\right)^{1/2}$$ 1.